

ALGORITMOS DE PUNTO FIJO USANDO SUBDIVISIONES SIMPLICIALES¹

CARLOS E. AZOFEIFA²

Resumen

Se estudiará un algoritmo para aproximar puntos fijos usando subdivisiones simpliciales de un simplex S , el cual será comparado con un algoritmo del mismo tipo pero basado en conjuntos primitivos.

Abstract

In this paper we study an algorithm for approximating fixed points using simplicial subdivisions of the simplex. Furthermore, it is compared with algorithms of primitive sets.

1 Introducción

En la determinación de un punto fijo de una función continua y particularmente en su aproximación numérica, se han utilizado conjuntos primitivos; siendo uno de los precursores Scarf el cual utiliza por primera vez un método general para hacer explícita una solución numérica del modelo neoclásico del equilibrio económico.

Scarf analiza y demuestra la manera en la cual esta discusión abstracta se puede transformar en una herramienta práctica para la evaluación de la política económica. Este método computacional, el cual es de considerable interés matemático en si mismo, es elaborado en detalle y aplicado a una variedad de ejemplos específicos.

La demostración de la existencia de equilibrio de precios para un modelo general walrasiano ³ hace uso de algunas variantes del teorema de punto fijo de Brouwer como un paso sumamente importante en el argumento.

Se quiere ahora estudiar otro algoritmo con el mismo fin, pero haciendo uso de las subdivisiones simpliciales. Estos algoritmos son muy importantes en la computación de

¹Este trabajo se realizó dentro del Proyecto N° 114-93-335: “Teoría matemática del punto fijo y sus aplicaciones”, inscrito en la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad de Costa Rica.

²ESCUELA DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD DE COSTA RICA, 2060 SAN JOSÉ, COSTA RICA.

³Es interesante observar en [1] Acuña-Ulate, una introducción de la teoría del equilibrio general, así como el concepto de economía regular y la prueba de la existencia de equilibrio walrasiano para tal economía.

equilibrio de precios. La estrategia a seguir es muy simple: pedimos que cada paso constructivo por una aproximación numérica del punto fijo sea consecuencia del Teorema de Brouwer o por algunas de sus implicaciones, es importante resaltar el hecho de que el paso al límite es el aspecto no constructivo del Teorema de Brouwer y por lo tanto no es posible asegurar que el subsimplex determinado por una red fina de vectores en el simplex S contenga o esté muy cerca del verdadero punto fijo de la función.

Ahora bien, en la mayoría de las aplicaciones de este teorema que nos son familiares, por lo general no es necesario determinar vectores que estén cerca de su propia imagen. Pues, cuando la red es suficientemente fina, todos los vectores en el subsimplex con distintas etiquetas tendrán esta propiedad de acuerdo al siguiente argumento fácilmente de probar:

Como la función f es continua y el simplex es cerrado y acotado, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x'\| \leq \delta$, entonces $\|f(x) - f(x')\| \leq \epsilon$, aquí la norma es dada por: $\|x\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. De aquí se deduce fácilmente que $\|f(x) - x\| \leq (n-1)(\epsilon + \delta)$.

En la práctica resulta que esta cota es débil y por tanto la diferencia entre un vector en el simplex y su imagen es muy pequeña, sin embargo el grado de aproximación puede obtenerse usando las técnicas estándar del análisis numérico. El lector interesado en una revisión de los modelos competitivos puede consultar ([3],[9],[18]).

2 Computando puntos fijos

Presentaremos un algoritmo para aproximar un punto fijo de una función continua de el simplex unitario S en si mismo. Un simplex se define como el casco convexo de sus n vértices v^1, \dots, v^n , es decir, es el conjunto de puntos de la forma

$$x = \sum \alpha_j v^j \text{ con } \alpha_j \geq 0 \text{ y } \sum \alpha_j = 1$$

con esta notación un simplex de dimensión $n-1$, tiene n caras de dimensión $n-2$ y la cara opuesta al vértice v^j consiste de aquellos vectores cuya representación como una combinación convexa de los vértices tiene $\alpha_j = 0$.

Así por ejemplo en el caso de dimensión tres, geoméricamente el simplex se representa como:

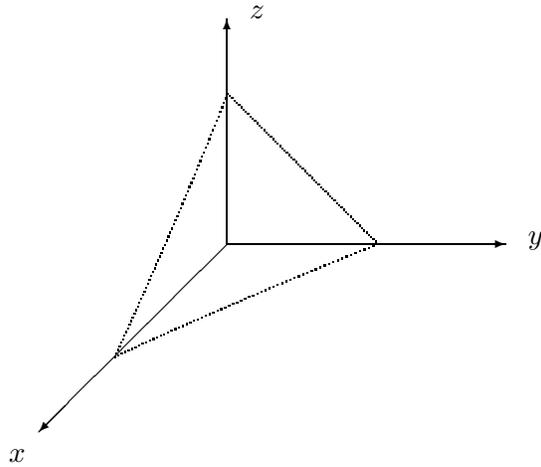


Figura 1

Para nuestros propósitos consideraremos una colección especial de simplices, a saber: S^1, S^2, \dots, S^k contenidos en un simplex más grande S , esta colección se llama una subdivisión simplicial de acuerdo a la siguiente definición:

Definición 1

La colección de simplices S^1, \dots, S^k se llama una subdivisión simplicial de S si S está contenido en la unión de los simplices S^1, \dots, S^k , y además la intersección de cualesquiera dos simplices es vacía o bien una cara llena de ambos. Un ejemplo de una subdivisión simplicial del simplex es dada en la siguiente figura:

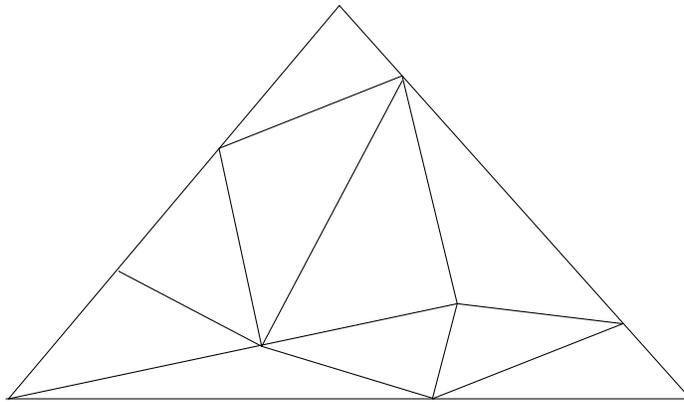


Figura 2

Como el concepto de subdivisión simplicial será comparado con el de conjunto primitivo, por tanto se hace necesario tener a mano dicha definición, sin embargo para ello necesitamos un resultado previo.

Definición 2

Sea S un simplex, decimos que un subsimplex de S tiene la misma orientación de S si el subsimplex es definido por un sistema de inecuaciones de la forma :

$$\begin{aligned} x_1 &\geq b_1 \\ x_2 &\geq b_2 \\ &\vdots \\ x_n &\geq b_n \end{aligned}$$

donde $b_i \geq 0 \forall i$ y $\sum_{i=1}^n b_i < 1$, para algunos b_1, \dots, b_n .

Observamos en esta definición, que los subsimples que tienen la misma orientación de S , son aquellos cuyos lados son paralelos a los de S . El algoritmo de conjuntos primitivos se fundamenta en el estudio de subconjuntos formados por n vectores, para ello primeramente se selecciona una lista grande de vectores x^{n+1}, \dots, x^k **los cuales estarán localizados arbitrariamente en el simplex S** . El iniciar con el vector x^{n+1} en lugar de x^1 se debe solamente a razones de conveniencia. La escogencia de estos vectores se hará de acuerdo a la siguiente hipótesis no degenerativa:

Hipótesis

Vectores que tengan componentes nulas no pueden estar en la lista, así mismo dos vectores en la lista no pueden tener idénticas su i -ésima componente para todo i .

Ahora bien, una vez que tenemos la lista de vectores ¿cómo sabemos que dado un subconjunto de estos vectores forman un subsimplex con la misma orientación de S ? Para ello utilizamos el siguiente lema.

Lema 1

Consideremos la lista de vectores x^{n+1}, \dots, x^k con la hipótesis anterior y un subconjunto suyo de vectores x^{j_1}, \dots, x^{j_n} ; para que estos vectores formen un subsimplex con la misma orientación de S y que cada lado contenga uno y solo uno de estos vectores es necesario y suficiente que en la matriz A los elementos más pequeños de cada fila se localicen en columnas diferentes. La matriz A es la matriz $n \times n$ cuyas columnas son los componentes de los vectores x^{j_1}, \dots, x^{j_n} .

Definición 3 [18]

Los vectores x^{j_1}, \dots, x^{j_n} definen un **conjunto primitivo** de vectores si:

1. Es posible obtener un subsimplex que satisfaga el lema 1, y
2. Ningún vector en la lista x^{n+1}, \dots, x^k es interior a este subsimplex.

Ejemplo de un conjunto primitivo

El siguiente ejemplo nos permitirá entender mejor el concepto de conjunto primitivo. Supongamos que tenemos los vectores x^7, \dots, x^{13} en la lista y sus componentes dados por las columnas de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} .1 & .2 & .4 & .3 & .39 & .01 & .15 \\ .1 & .11 & .2 & .19 & .09 & .3 & .4 \\ .7 & .6 & .2 & .1 & .21 & .5 & .3 \\ .1 & .09 & .2 & .41 & .31 & .19 & .15 \end{pmatrix}$$

Ahora consideramos los vectores x^8, x^9, x^{11}, x^{13} , cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} .2 & .4 & .39 & \underline{.15} \\ .11 & .2 & \underline{.09} & .4 \\ .6 & \underline{.2} & .21 & .3 \\ \underline{.09} & .2 & .31 & .15 \end{pmatrix}$$

Observamos que los elementos mínimos de cada fila, los cuales aparecen subrayados, se encuentran en columnas diferentes. Por otra parte el subsimplex formado por el conjunto de vectores, es dado por:

$$x_1 \geq .09, \quad x_2 \geq .2, \quad x_3 \geq .09, \quad x_4 \geq .15$$

y ninguna columna de la primera matriz posee un vector estrictamente interior a este simplex puesto que no hay ninguna columna con sus cuatro coordenadas estrictamente más grandes que los cuatro números del simplex. Por lo tanto el conjunto x^8, x^9, x^{11}, x^{13} es un conjunto primitivo.

Analizando la definición 3 se observa que cualquier subsimplex de S , es interior a S , por lo tanto si queremos incorporar los lados del simplex S a formar parte de los subsimplex será necesario extender la definición anterior, en efecto :

Extensión de la definición 3

Si consideramos los $n - m$ vectores $x^{j_1}, \dots, x^{j_{n-m}}$ junto con los m lados S^{i_1}, \dots, S^{i_m} entonces estos n vectores forman un **conjunto primitivo de vectores** si ningún vector en la lista x^{n+1}, \dots, x^k es interior al simplex definido por

$$x_{i_1} \geq 0, \dots, x_{i_m} \geq 0$$

$$x_i \geq \min[x_i^{j_1}, \dots, x_i^{j_{n-m}}], \text{ con } i \neq i_1, \dots, i_m.$$

Con esta convención podemos resumir así el criterio para encontrar conjuntos primitivos:

$\{x^{j_1}, \dots, x^{j_n}\}$ forma un conjunto primitivo de vectores \iff en la lista de vectores x^{n+1}, \dots, x^k no existen vectores interiores al subsimplex:

$$x_1 \geq \min[x_1^{j_1}, \dots, x_1^{j_n}]$$

$$\vdots$$

$$x_n \geq \min[x_n^{j_1}, \dots, x_n^{j_n}]$$

Ahora bien, volviendo a las subdivisiones simpliciales la siguiente definición nos permitirá asociar luego etiquetas de manera única en la aplicación del algoritmo:

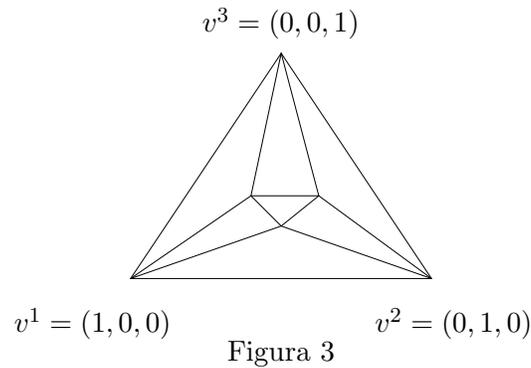
Definición 4

Consideremos el simplex

$$S = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0, \sum x_j = 1\}$$

S se llama *restringido* si no hay vértices de la subdivisión, aparte de los n vectores unitarios, en la frontera de S .

La siguiente figura nos proporciona un ejemplo de subdivisión simplicial restringida:



De hecho podemos observar que la orientación de un simplex definido en este estilo es mucho más general que aquellos considerados en el estudio de los conjuntos primitivos, por ejemplo, se observa que los lados del simplex no necesariamente deben ser paralelos a los hiperplanos coordenados como ocurría en el caso de los conjuntos primitivos.

Para nuestros propósitos consideraremos una subdivisión restringida del simplex S , donde v^1, v^2, \dots, v^n representan los n vectores unitarios, conjuntamente con los vértices v^{n+1}, \dots, v^k . Cada vértice de la subdivisión tendrá asociado una etiqueta entera $e(v^i) \in \{1, 2, \dots, n\}$, por el momento la asignación de etiquetas será arbitraria, con excepción de los primeros n vectores cuyas etiquetas están dadas por $e(v^i) = i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$. Esta última asignación de etiquetas a los n vectores unitarios es similar al caso de los conjuntos primitivos.

Teorema 1 [18]

Consideremos la subdivisión simplicial restringida con la condición $e(v^i) = i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$. Luego existe al menos un simplex en la subdivisión simplicial cuyas etiquetas son todas distintas.

Demostración

En la demostración probaremos la existencia de un simplex con las características anteriores basados en un procedimiento computacional, y, donde resaltaremos además las analogías con el teorema paralelo desarrollado para conjuntos primitivos, en efecto:

1. Se usará el argumento que aparece primero en Lemke y Howson (1964) [16].
2. El algoritmo comienza al considerar el único simplex en la subdivisión cuyos vértices están dados por los $n - 1$ vectores unitarios v^2, v^3, \dots, v^n más otro vértice, al cual llamaremos v^j . Los primeros $n - 1$ vectores tienen etiquetas $2, 3, \dots, n$. El paso siguiente es parecido al de conjuntos primitivos, si el vértice v^j tiene etiqueta 1, entonces el algoritmo termina con un simplex cuyas etiquetas son todas diferentes. Por el contrario si $e(v^j) \in \{2, 3, \dots, n\}$, entonces se procede a eliminar el vértice que tiene la etiqueta $e(v^j)$ y por tanto llegamos a un nuevo simplex en la subdivisión. Como se ha introducido un nuevo vértice procedemos otra vez a examinar su etiqueta,

si ésta es 1, terminamos; en caso contrario tratamos de eliminar aquel vértice en el simplex que tenga la misma etiqueta del vértice anteriormente introducido y así sucesivamente.

3. El algoritmo nunca regresa a un simplex previamente alcanzado y que termina en un número finito de iteraciones. Demostraremos esto último, es decir, que el algoritmo termina en un número finito de iteraciones, con un simplex cuyas etiquetas son todas distintas, para ello es suficiente mostrar que el algoritmo nunca retorna al mismo simplex. En efecto consideremos un primer simplex que es revisitado (figura 4),

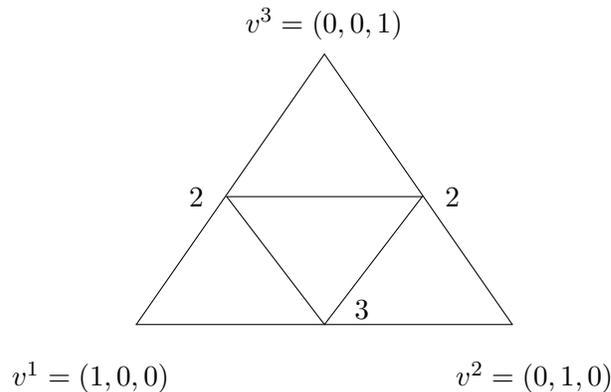


Figura 4

si él no es el simplex inicial, entonces se puede alcanzar en una o dos maneras a través de uno u otro de los simplices adyacentes con $n - 1$ etiquetas diferentes. Pero de hecho algunos de estos simplices adyacentes se pueden encontrar en la primera visita, y, por tanto nuestro simplex considerado no es el primero en ser revisitado. Utilizando un argumento similar se demuestra que el simplex inicial considerado v^2, \dots, v^n más otro vértice no es el primer simplex revisitado, concluyendo así la demostración del teorema 1.

Otro objetivo que se persigue al comparar la demostración del teorema 1 con el teorema análogo a conjuntos primitivos dado por Scarf ([1],[18]) es el de estudiar el *Lema de Sperner* el cual es un lema combinatorio muy usado en la demostración del Teorema de Brouwer, este lema es en realidad una generalización del Teorema 1 a subdivisiones simpliciales arbitrarias del simplex en lugar de conjuntos primitivos.

Antes de enunciar el *Lema de Sperner* pondremos las condiciones necesarias para ello, en efecto: Consideremos una subdivisión simplicial de S , donde muchos de sus vértices están en su frontera. Como siempre los vértices v^j tendrán etiquetas $e(v^j) \in \{1, \dots, n\}$, en particular los vértices del interior tendrán etiquetas arbitrarias (figura 5). Para garantizar la existencia del simplex con todas las etiquetas diferentes los vértices en las caras frontera del simplex deberán cumplir:

Lema de Sperner [18]⁴

Consideremos un vértice arbitrario v en la subdivisión y supongamos que su etiqueta $e(v)$ es uno de los índices i tales que $v_i > 0$. Luego existe un simplex en la subdivisión con etiquetas diferentes.

Demostración

La hipótesis de este lema se puede observar en la figura 5.

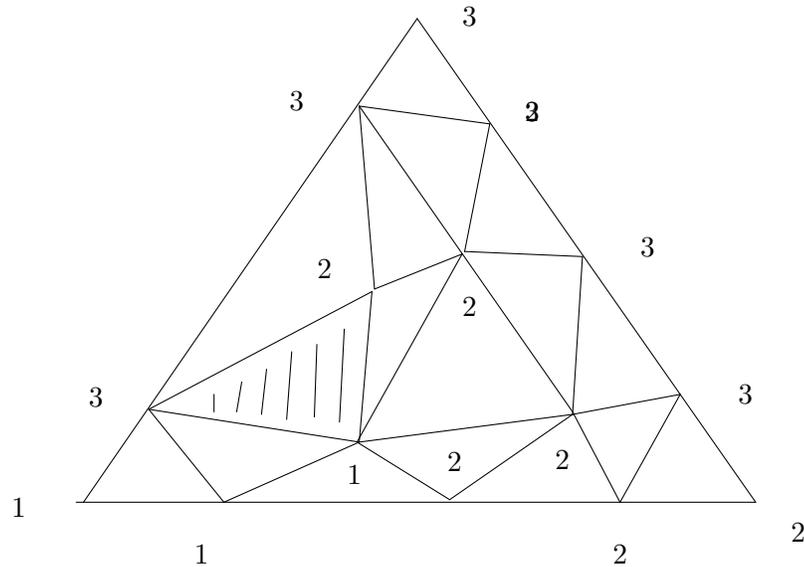


Figura 5

Ahora se demostrará el *Lema de Sperner* por medio del procedimiento computacional. Para ello encajamos el simplex unitario en un simplex S' que tiene a S^1, S^2, \dots, S^n como vértices. Es claro que la subdivisión simplicial de S se deberá extender a una subdivisión simplicial restringida a S' , para ello introducimos un número de simplices obtenidos de la siguiente manera: Sea $P \subset \{1, 2, \dots, n\}$ formado por $t < n$ miembros.

Los $n - t$ vértices tomados en la cara de S son definidos por $x_j = 0$ para $j \in P$, y perteneciendo además a un único simplex de la subdivisión de S . Para definir un simplex en la subdivisión larga se aumentan los $n - t$ vértices en S como se nota en la figura 6 por los t vértices s^i con $i \in P$.

Definimos $e(s^i) = i + 1$ (módulo n), es decir $e(s^1) = 2, e(s^2) = 3, \dots, e(s^n) = 1$, un

⁴Históricamente este lema formó la base para los teoremas de punto fijo.

simplex completamente etiquetado es posible que contenga los vértices s^i , para $i \in P$, y los otros $n - t$ vértices en la cara $x_i = 0$, $i \in P$. Para este resto de vértices por la hipótesis del Lema tendrán etiquetas diferentes de los miembros de P , por tanto la colección de vértices S^i en el simplex completamente etiquetado deben llevar todas las etiquetas de P .

Pero esto es una contradicción al hecho de que $e(s^i) = i + 1$ (módulo n), a menos que $P = \emptyset$ y el simplex completamente etiquetado es un miembro de la subdivisión simplicial de S . Con esto completamos la demostración del *Lema de Sperner*.

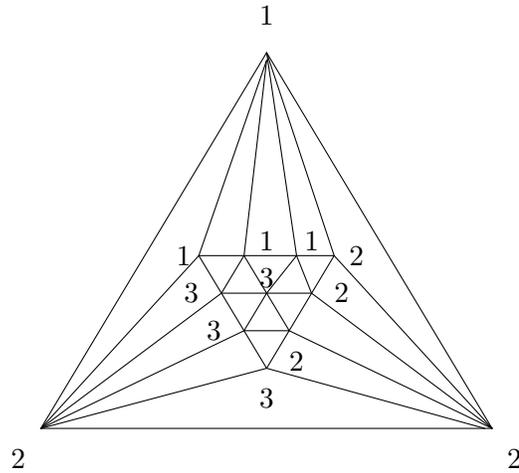


Figura 6

3 Conclusiones

Como complemento a este teorema podemos resaltar los siguientes hechos:

1. Usando las divisiones simpliciales y el *Lema de Sperner* se puede demostrar fácilmente el Teorema de Brouwer [18].
2. Sabemos que el algoritmo descrito anteriormente aproxima un punto fijo de una función continua moviéndose sistemáticamente a través de una sucesión de simplices en la subdivisión simplicial, si el método va a ser implementado en un computador de manera efectiva, la operación de reemplazo debe resultar facil de obtener; aún más, los vértices de la subdivisión deben de estar dispersos con alguna regularidad a través del simplex unitario, de tal manera que el grado de aproximación sea independiente de la región en el simplex en el cual el punto fijo estará.

En este sentido Hansen (1968) [11] y Kun (1968) [14] resuelven satisfactoriamente los problemas anteriores. De hecho hay otras subdivisiones donde la operación reemplazo tiene una forma realmente simple y facil de obtener, en particular nos referimos

a los algoritmos de Merry (1972) [17], Eaves (1972) [7], van der Laan y Talman (1979) [15]. Sin embargo, es posible introducir mejoras en estos algoritmos, Michael Todd en [22], usa el punto de vista homotópico para tal propósito.

En efecto, en lugar de asignar vectores etiquetados a los vértices de alguna subdivisión simplicial, Todd considera puntos fijos o ceros de funciones continuas de correspondencias semicontinuas superiormente, por supuesto, estas mejoras de los algoritmos citados se realizan cuando son aplicados a problemas de equilibrio. De hecho estos algoritmos homotópicos lineales por partes pueden proveer aproximaciones bastantes exactas en equilibrio económico, aún con una razonable cantidad de tiempo de computador. El único inconveniente es que para lograr una excelente efectividad estos algoritmos se pueden volver sofisticados y complicados, y, por lo tanto pueden terminar sirviendo de cajas negras para “modeladores económicos” y perder su fin original.

3. Las técnicas descritas anteriormente para la solución numérica se pueden emplear con gran efectividad en una variedad de problemas, por ejemplo, en la aproximación de equilibrio de precios en un modelo general walrasiano, con o sin producción; en la resolución de problemas no lineales, más recientemente en análisis de energía y modelos generales de equilibrio, etc.
4. Estudiando en detalle los dos algoritmos anteriores, observamos que formalmente son equivalentes, pero cuando se imponen condiciones a las subdivisiones simpliciales para economizar almacenamiento y búsqueda, el algoritmo puede ser más o menos eficaz con respecto al algoritmo basado en conjuntos primitivos.
5. Otros métodos computacionales alternativos los encontramos con: Kellog, Li, y Yorke (1977) [13], y Smale (1976) [19], los cuales evitan totalmente las subdivisiones simpliciales para usar en su lugar métodos de la topología diferencial.
6. En [9] se encuentran trabajos interesantes al respecto, en programación lineal y no lineal, así como otra demostración del *Lema de Sperner* pero usando coordenadas baricéntricas.

Referencias

- [1] Acuña, O.; Ulate; F. (1994) “Equilibrio walrasiano en economías de intercambio”, *Revista de Matemática*, 1(1): 1–16.
- [2] Azofeifa, C. (1995) “Aplicaciones de las técnicas de punto fijo”, *Revista Ciencia y Tecnología*, 14(1-2): 69–80.
- [3] Azofeifa, C. (1993) *Aplicaciones de la Teoría de Punto Fijo*, Tesis de Maestría, Universidad de Costa Rica, San Pedro.

- [4] Balinski; Cote. (1978) *Complementary and Fixed Point Problems*. North-Holland, Amsterdam.
- [5] Belluce, L.P.; Kirk, W.A. (1967) *Fixed Point Theorems for Certain Classes of Non-expansive Mappings*, New York.
- [6] Border, K. (1985) *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*. Cambridge University Press.
- [7] Eaves, B.C (1972) "Homotopies for computation of fixed points", *Math. Progr.*, 3(1): 1–22.
- [8] Fadell, E.; Fournier, G. (1981) *Fixed Point Theory*. Lectures Notes in Mathematics, Springer–Verlag, New York.
- [9] Franklin, J. (1980) *Methods of Mathematical Economics Linear and Nonlinear Programming, Fixed Point Theorems*. Springer–Verlag, New York.
- [10] Garcia, C.; Lemke, C.E.; Lueti. (1973) "Simplicial approximation of an equilibrium point for non-cooperative n-persons games", *Math. Prog.*, T.C. Hu & S.M. Robinson (eds.), Academic Press, New York.
- [11] Hansen, T. (1968) *On the Approximation of a Competitive Equilibrium Model*. Ph.D. Thesis, Yale University.
- [12] Istratèsescu, V. (1981) *Fixed Point Theory. An Introduction*. D. Reidel Publishing Company, Boston.
- [13] Kellogg, R.B.; Li, T.Y.; Yorke, J. (1977) "A method of continuation for calculating a Brouwer fixed point", In *Fixed Points: Algorithms and Applications*, S. Karamardian & C.B. Garcia (eds.), Academic Press, New York.
- [14] Kuhm, H.W. (1968) "Simplicial approximation of fixed points", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 61: 1238–1242.
- [15] Laan, G. van der; Talman, J.J. (1979) "A restart algorithm for computing fixed points without an extra dimension", *Math. Progr.*, 17: 74–84.
- [16] Lemke, C.E.; Howson, J.T. (1964) "Equilibrium points of bimatrix games", *SIAM J. Appl. Math.*, 12(2): 413–423.
- [17] Merrill, O.H. (1972) *Applications and Extensions of an Algorithm that Computes Fixed Points of Certain Upper Semi-continuous Point to Set Mappings*. Ph.D. dissertation, Department of Industrial Engineering, University of Michigan.
- [18] Scarf, H. (1973) *The Computation of Economic Equilibria*. Yale University Press.
- [19] Smale, S. (1976) "A convergent process of price adjustment and global Newton methods", *J. Math. Econ.*, 3: 107–120.

- [20] Smart, D.R. (1974) *Fixed Point Theorems*. Cambridge Tracts in Mathematics, Great Britain.
- [21] Todd, M. (1980) *The Computation of Fixed Points and Applications*. Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, New York.
- [22] Todd, M. (1984) “Efficient methods of computing economic equilibria”, *Applied General Equilibrium Analysis*, H. Scarf & J. Shoven (eds.), Cambridge University Press.
- [23] Zamfirescu, T. (1972) “Fixed Point Theorems in Metric Spaces”, *Arch. Math.*, 23: 292–298, MR 46 #9957.