

<http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/ingenieria>
ISSN 2215-2652

Ingeniería

Revista de la Universidad de Costa Rica

AGOSTO/DICIEMBRE 2013 - VOLUMEN 23 Número (2)



ELEMENTOS DE PRE-ANÁLISIS DE DISEÑO DE REDES GEODÉSICAS PARA EL CONTROL DE OBRAS CIVILES

Ing. Juan Araque Skinner

Resumen

Este trabajo muestra las fórmulas de ajuste amarrado por mínimos cuadrados de observaciones mediatas, así como las ecuaciones estándar de acimut y distancia, para un ejemplo propuesto de pre-análisis bidimensional de un cuadrilátero medido hipotéticamente con dos receptores de los Sistemas de Navegación Global por Satélites GNSS (por sus siglas en inglés), aunque también se podría suponer para nuestros fines, haber sido medido con métodos topográficos convencionales, por ejemplo utilizando teodolito y distanciómetro, fijado a uno sólo de sus vértices, dentro de un sistema local de coordenadas planas.

El caso se puede aplicar a una red de tamaño significativo, con diversos tipos de observaciones, múltiples puntos de amarre y dentro de un sistema de coordenadas en determinada proyección. Evidentemente, el objetivo de este ensayo va dirigido al topógrafo poco familiarizado con el tema, para mostrar la utilidad de esta ingeniosa herramienta de simulación, que nos ayuda a escoger entre múltiples posibilidades de medición y de economía en su realización.

Palabras clave: mínimos cuadrados, ajuste amarrado, pre-análisis bidimensional.

Abstract

This work shows the formulas of adjustment tied by least squares of mediate observations and the standard equations of azimuth and distance, for a look-ahead two-dimension pre-analysis of a quadrilateral measured hypothetically by two receivers of the Global Navigation Satellite System (GNSS), although one might assume for our purposes, have been measured with conventional surveying methods, for example using theodolite and EDM, fixed to only one of its vertices, within a local flat coordinate system.

This case can be applied to a network of significant size with different observation types, multiple attachment points and within a coordinate system in a particular projection. Obviously, the purpose of this essay is addressed to that surveyor unfamiliar with the subject, to show the usefulness of this ingenious simulation tool that helps us choose between multiple measurement options and economy possibilities in carrying them out.

Keywords: least squares, adjustment tied, two-dimension pre-analysis.

Recibido: 21 de mayo de 2013 • **Aprobado:** 29 de octubre de 2013

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo, mediante la utilización de fórmulas conocidas del ajuste por mínimos cuadrados de observaciones mediatas, y en el caso especial, procesando los datos de acimutes y distancias hipotéticamente obtenidos gracias al empleo de receptores de señales del Sistema

de Navegación Global por Satélites, se sugiere un tipo de metodología para pronosticar, entre cuales de los diferentes casos de prediseño de redes geodésicas para el control de obras civiles, se puede con seguridad, escoger la opción de prediseño más económica, fácil de llevar a la práctica y con la cual se obtengan las exactitudes requeridas, sea para el control de la

estructura de una represa, de las direcciones y las distancias principales, para replantear ejes de túneles y puentes, etc.

En esta investigación, se evaluó el comportamiento del modelo matemático de simulación del ajuste por mínimos cuadrados de un cuadrilátero donde se pretenden medir distancias y acimutes, formando una poligonal cerrada y se compararon los resultados finales (elipses de confianza al 95 % de probabilidad) con los del modelo mejorado, al cual se le agregaron las diagonales, para convertir la figura de estudio en un polígono totalmente controlado en su rigidez, conforme a la ley de propagación de errores de Gauss.

2. METODOLOGÍA: PRINCIPIO DE LA TEORÍA DE MÍNIMOS CUADRADOS

De conformidad a Hübner (1980), en la topografía y la geodesia se determinan dimensiones geométricas o físicas por observaciones. La experiencia dice que por diferentes razones (errores causados por las personas, errores instrumentales y errores por las circunstancias), cada observación se distingue de otra. Este hecho no nos sorprende, debido a los cambios continuos en el lugar donde se ejecutan las observaciones, tanto en las circunstancias como se realizan estas, como por la atención y operación del observador, etc. De ninguna manera se puede repetir completamente una situación momentánea, por lo tanto, ningún hecho coincide con otro o ninguna medición coincide con otra. Tomando esto en cuenta, se ve la razón de medir más elementos o efectuar repeticiones para poder determinar con mayor seguridad una magnitud.

Siempre y cuando se cuente con más observaciones que las necesarias para la resolución de un problema físico o geométrico, se puede aplicar el ajuste con el propósito de obtener los valores ajustados o más probables, tomando en cuenta todos los datos obtenidos.

El método para alcanzar esta meta, que se puede aplicar con otros propósitos, como por ejemplo para determinar si un trabajo es o no utilizable y que grado de confianza se le puede asignar, se llama ajuste y se basa en el principio

de los mínimos cuadrados, y en su aplicación se deben rechazar todas las observaciones falsificadas por errores groseros o por errores sistemáticos, utilizándose únicamente las observaciones afectadas por errores casuales que obedecen a las leyes del azar.

A continuación, se repasa el modelo matemático que se llevará a la práctica en el ejemplo que se propone y resuelve adelante, sobre el pre-análisis bidimensional de un cuadrilátero medido hipotéticamente.

2.1. Ecuaciones originales de observación y su ajuste matricial por mínimos cuadrados.

$$L_i + V_i = a_i x_1 + b_i x_2 + \dots + u_i x_u$$

L_i = observación (distancia, acimut, ángulo, diferencia de elevación, etc.); V_i = residuo de la observación que hace posible la igualdad entre los dos lados de la ecuación original de observación; a_i, b_i, \dots, u_i = coeficientes que multiplican a las incógnitas; x_1, x_2, \dots, x_u = incógnitas de la ecuación.

$i = 1, \dots, n$, $n > u$ (n es el número de observaciones y u es el número de incógnitas).

Para que se cumpla el principio de los cuadrados mínimos, se requiere que $\sum P_i V_i V_i = \text{mínimo}$.

P_i = pesos asignados a las observaciones L_i

Se puede escribir y desarrollar lo anterior en forma matricial de la siguiente manera:

$$\underline{L} + \underline{V} = \underline{A} \underline{X}; \underline{P}$$

$$\underline{V} = \underline{A} \underline{X} - \underline{L} \text{ ecuaciones de observación}$$

$$\underline{V}^T = \underline{X}^T \underline{A}^T - \underline{L}^T \text{ matriz anterior transpuesta}$$

$$\sum_{i=1}^n P_i V_i V_i = \underline{V}^T \underline{P} \underline{V}$$

$$\underline{V} \underline{P} \underline{V}^T = (\underline{X}^T \underline{A}^T - \underline{L}^T) \underline{P} (\underline{A} \underline{X} - \underline{L})$$

$$(\underline{X}^T \underline{A}^T - \underline{L}^T) \underline{P} (\underline{A} \underline{X} - \underline{L}) = \underline{X}^T \underline{A}^T \underline{P} \underline{A} \underline{X} - \underline{L}^T \underline{P} \underline{A} \underline{X} - \underline{X}^T \underline{A}^T \underline{P} \underline{L} + \underline{L}^T \underline{P} \underline{L}$$

$$\underline{X}^T \underline{A}^T \underline{P} \underline{A} \underline{X} - \underline{L}^T \underline{P} \underline{A} \underline{X} - \underline{X}^T \underline{A}^T \underline{P} \underline{L} - \underline{L}^T \underline{P} \underline{L} = \underline{X}^T \underline{A}^T \underline{P} \underline{A} \underline{X} - \underline{X}^T \underline{A}^T \underline{P} \underline{L} - \underline{X}^T \underline{A}^T \underline{P} \underline{L} + \underline{L}^T \underline{P} \underline{L}$$

$$\underline{X}^T \underline{A}^T \underline{P} \underline{A} \underline{X} - \underline{X}^T \underline{A}^T \underline{P} \underline{L} - \underline{X}^T \underline{A}^T \underline{P} \underline{L} + \underline{L}^T \underline{P} \underline{L} = \underline{X}^T \underline{A}^T \underline{P} \underline{A} \underline{X} - 2 \underline{X}^T \underline{A}^T \underline{P} \underline{L} + \underline{L}^T \underline{P} \underline{L}$$

$$\partial(\underline{V} \underline{P} \underline{V}^T) / \partial \underline{X} = 2 \underline{A}^T \underline{P} \underline{A} \underline{X} - 2 \underline{A}^T \underline{P} \underline{L}$$

Con $\underline{V} \underline{P} \underline{V}^T = \text{mínimo}$; $\partial(\underline{V} \underline{P} \underline{V}^T) / \partial \underline{X} = 0$

$$\underline{A}^T \underline{P} \underline{A} \underline{X} = \underline{A}^T \underline{P} \underline{L}$$

$$(\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A}) \underline{X} = (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{P} \underline{L}$$

$$\underline{I} \underline{X} = (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{P} \underline{L}; \underline{I} = \text{matriz identidad}$$

$$\underline{X} = (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{P} \underline{L}$$

$\sigma_0^2 = (\underline{V} \underline{P} \underline{V}^T) / (n-u)$; el cuadrado del error medio cuadrático de cualquier observación

$\underline{\Sigma}_{xx} = \sigma_0^2 (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1}$; la matriz de la varianza covarianza de las incógnitas

Para el preanálisis de diseño de redes, se usará la matriz de la varianza covarianza, tomando en consideración, que en un ajuste con observaciones reales σ_0^2 debe llegar a ser un valor próximo a **1**, para cumplir satisfactoriamente con el test estadístico de Chi-cuadrado, que indicaría en este caso que los pesos utilizados en las observaciones y el modelo del ajuste son correctos. En la simulación del ajuste de redes, como no se utilizaron observaciones, no se puede calcular el vector \underline{V} .

La matriz de varianza covarianza, estará dada por $\underline{\Sigma}_{xx} = (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1}$.

2.2. Ecuaciones de observación modificadas y linealizadas entre vértices i j de la red, con coordenadas ajustadas N_i ; E_i ; N_j ; E_j .

Donde se puede escribir: $N_i = N_{0i} + \delta N_i$; $E_i = E_{0i} + \delta E_i$; $N_j = N_{0j} + \delta N_j$; $E_j = E_{0j} + \delta E_j$

Siendo N_{0i} , E_{0i} , N_{0j} , E_{0j} , los valores aproximados de las coordenadas de la red, valores

viejos conocidos, deducidos de cálculos preliminares utilizando las nuevas observaciones o leídos por ejemplo de un mapa a escala lo más grande posible, según sea el caso y suponemos que la δN_i ; δE_i ; δN_j y δE_j son diferencialmente pequeños.

Entonces las funciones entre vértices i j de la red se pueden expresar utilizando la serie de Taylor:

$$V_{ij} = [\partial(F_{ij})/\partial N_i]_0 \delta N_i + [\partial(F_{ij})/\partial E_i]_0 \delta E_i + [\partial(F_{ij})/\partial N_j]_0 \delta N_j + [\partial(F_{ij})/\partial E_j]_0 \delta E_j + L_{ij} \text{ (aproximada)} - L_{ij} \text{ (observada)}$$

$[\partial(F_{ij})/\partial N]_0$ o $[\partial(F_{ij})/\partial E]_0$ son las derivadas parciales de las funciones F entre los puntos i j, evaluadas en los valores aproximados de las coordenadas de la red, así como la observación L_{ij} (aproximada) obtenida introduciendo dichos valores en la función F.

2.2.1. Ecuaciones originales de observación de distancias y acimutes.

$$S_{ij} = [(N_j - N_i)^2 + (E_j - E_i)^2]^{1/2}$$

$$Ac_{ij} = \alpha_{ij} = \text{Arctg} [(E_j - E_i) / (N_j - N_i)]$$

2.2.1.1. Ecuaciones de observación de distancias modificadas y linealizadas

$$V_s = [(N_{0j} - N_{0i})/S_0] \delta N_j + [(E_{0j} - E_{0i})/S_0] \delta E_j - [(N_{0j} - N_{0i})/S_0] \delta N_i - [(E_{0j} - E_{0i})/S_0] \delta E_i + S_{(aprox)} - S_{(obs)}$$

$$S_0 = S_{(aprox)}$$

2.2.1.2 Ecuaciones de observación de acimutes modificadas y linealizadas entre vértices i j de la red.

$$V_\alpha = [(N_{0j} - N_{0i})/S_{02}] \delta E_j - [(E_{0j} - E_{0i})/S_{02}] \delta N_j - [(N_{0j} - N_{0i})/S_{02}] \delta E_i + [(E_{0j} - E_{0i})/S_{02}] \delta N_i + \alpha_{(aprox)} - \alpha_{(obs)}$$

$$\alpha_0 = \alpha_{(aprox)}$$

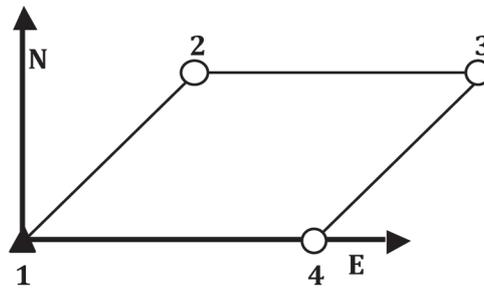


Figura 1. Cuadrilátero donde se pretenden medir distancias y acimutes, formando una poligonal cerrada.

Fuente: Elaboración propia, 2013

Cuadro 1. Valores de coordenadas aproximadas (cm).

Vértice	Tipo	Norte aprox.	Este aprox.
1	Fijo	100000	100000
2	Nuevo	200000	200000
3	Nuevo	200000	400000
4	Nuevo	100000	100000

Fuente: Elaboración propia, 2013

3. EJEMPLO PRÁCTICO

Para la figura de prediseño (Figura 1), se calculan los coeficientes de la matriz \mathbf{A} de prediseño. Los pesos para las distancias y los acimutes del cuadrilátero se determinan considerando que las distancias y los acimutes entre los vértices son relativamente cortas y se supone que se midieron con dos georreceptores de una frecuencia L1, dentro de la banda del espectro electromagnético de las microondas, en modo de trabajo estático relativo, durante un tiempo de una hora de medición para cada sesión. La exactitud nominal de cada georreceptor es de

$\pm 5 \text{ mm} \pm 2 \text{ mm} \times \text{Km}$, para las distancias y de $\pm 1''$ para los acimutes.

Fórmulas de elipses absolutas de confianza, según Blachut, Chrzanowski & Saastamoinen, (1980):

$$a_{\max}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_N^2 + \sigma_E^2 + ((\sigma_N^2 - \sigma_E^2)^2 + 4\sigma_{NE}^2)^{\frac{1}{2}})$$

$$b_{\min}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_N^2 + \sigma_E^2 - ((\sigma_N^2 - \sigma_E^2)^2 + 4\sigma_{NE}^2)^{\frac{1}{2}})$$

$$\tan 2\phi = - (2\sigma_{NE}) / (\sigma_N^2 - \sigma_E^2)$$

Cuadro 2. Coeficientes de la matriz **A**.

σ_N	σ_E	σ_N	σ_E	σ_N	σ_E	Línea
0,71	0,71	0,00	0,00	0,00	0,00	1-2 S
0,00	1,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	2-3 S
0,00	0,00	-0,71	-0,71	0,71	0,71	3-4 S
0,00	0,00	0,00	0,00	0,32	0,95	4-1 S
-1,03	1,03	0,00	0,00	0,00	0,00	1-2 Ac
-1,03	0,00	1,03	0,00	0,00	0,00	2-3 Ac
0,00	0,00	1,03	-1,03	-1,03	1,03	3-4 Ac
0,00	0,00	0,00	0,00	-0,62	0,21	4-1 Ac

Fuente: Elaboración propia, 2013

Cuadro 3. Matriz de los pesos de las observaciones **P**.

3,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	2,4	0,0	0,0	0,00	0,00	0,00	0,0
0,0	0,0	3,1	0,0	0,71	0,71	0,71	0,0
0,0	0,0	0,0	2,4	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0

Fuente: Elaboración propia, 2013

Cuadro 4. Matriz de la varianza covarianza de las incógnitas $\Sigma_{xx} = \sigma_0^2 (\Delta^T P \Delta)^{-1}$.

0,36	-0,07	0,26	-0,07	0,22	-0,06
-0,07	0,31	-0,09	0,21	-0,08	0,12
0,26	-0,09	0,86	-0,13	0,72	-0,15
-0,07	0,21	-0,13	0,43	-0,13	0,25
0,22	-0,08	0,72	-0,13	0,94	-0,21
-0,06	0,12	-0,15	0,25	-0,21	0,37

Fuente: Elaboración propia, 2013

Cuadro 5. Cuadrados de los semiejes de las elipses estándar absolutas de confianza.

a^2_2	a^2_2	a^2_3	b^2_3	a^2_4	b^2_4
0,40	0,26	0,90	0,39	1,01	0,30

Fuente: Elaboración propia, 2013

Cuadro 6. Cuadrados de los semiejes de las elipses estándar absolutas de confianza.

ka_2	ka_2	ka_3	kb_3	ka_4	kb_4
1,6	1,3	2,3	1,5	2,5	1,3

Fuente: Elaboración propia, 2013

Donde $\phi (\leq 180^\circ)$ es el acimut de la dirección de σ_{\max}

Seguidamente, realizando los cálculos correspondientes de similar manera al caso anterior, se tratará de mejorar los resultados, introduciendo las diagonales que aparecen en la Figura 2 (distancias y acimutes de las líneas 1 a 3 y de 2 a 4).

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS.

Los Cuadros 6 y 11, muestran los valores de los semi-ejes de las elipses absolutas de confianza al 95 % de probabilidad “ai” y “bi” (con $i = 2$ hasta 4) de los puntos 2, 3 y 4 de los dos cuadriláteros examinados a priori: 1,6 cm, 1,3 cm, 2,3 cm, 1,5

cm, 2,5 cm y 1,3 cm contra 1,5 cm, 1,1 cm, 2,0 cm, 1,2 cm, 2,0 cm y 1,1 cm, respectivamente, que no llegan a variar entre sí más (los correspondientes), en solamente 0,5 cm, caso de 2,5 cm del semieje $a_4 = 2,5$ cm del primer cuadrilátero menos $a_4 = 2,0$ cm del segundo cuadrilátero. Esto comparado con el error nominal del fabricante que establecimos ± 5 mm ± 2 mm x Km, para lado del cuadrilátero que sea mayor a 1,4 Km ($\sigma = \pm 0,6$ cm), no resulta significativo.

Comparando los valores obtenidos para los semi-ejes de las elipses absolutas de confianza al 95 % de probabilidad, se pueden observar valores ligeramente mayores en el primer caso (malla poligonal cerrada) que en el segundo caso donde se reforzó la figura con diagonales. La diferencia en la forma de las elipses ai/bi, resulta también en nada significativa.

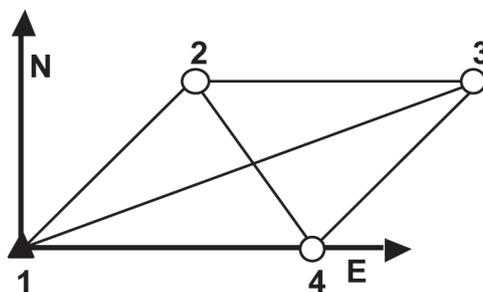


Figura 2. Cuadrilátero reforzado con diagonales.

Fuente: Elaboración propia, 2013

Cuadro 7. Coeficientes de la matriz A.

σ_N	σ_E	σ_N	σ_E	σ_N	σ_E	Línea
0,71	0,71	0,00	0,00	0,00	0,00	1-2 S
0,00	1,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	2-3 S
0,00	0,00	-0,71	-0,71	0,71	0,71	3-4 S
0,00	0,00	0,00	0,00	0,32	0,95	4-1 S
0,00	0,00	0,32	0,95	0,00	0,00	1-3 S
0,00	0,00	-0,71	0,71	0,71	-0,71	2-4 S
-1,03	1,03	0,00	0,00	0,00	0,00	1-2 Ac
-1,03	0,00	1,03	0,00	0,00	0,00	2-3 Ac
0,00	0,00	1,03	-1,03	-1,03	1,03	3-4 Ac
0,00	0,00	0,00	0,00	-0,62	0,21	4-1 Ac
0,00	0,00	-0,62	-0,21	0,00	0,00	1-3 Ac
1,03	1,03	0,00	0,00	-1,03	-1,03	2-4 Ac

Fuente: Elaboración propia, 2013

Cuadro 8. Matriz de los pesos de las observaciones \mathbf{P} .

3,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	2,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	3,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	2,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	1,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0

Fuente: Elaboración propia, 2013

Cuadro 9. Matriz de la varianza covarianza de las incógnitas $\underline{\Sigma}_{xx} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$.

0,33	-0,08	0,23	-0,07	0,22	-0,05
-0,08	0,25	-0,06	0,14	-0,05	0,11
0,23	-0,06	0,60	-0,14	0,50	-0,18
-0,07	0,14	-0,14	0,29	-0,16	0,20
0,22	-0,05	0,50	-0,16	0,61	-0,19
-0,05	0,11	-0,18	0,20	-0,19	0,30

Fuente: Elaboración propia, 2013

Cuadro 10. Cuadrados de los semiejes de las elipses estándar absolutas de confianza.

a^2_2	a^2_3	a^2_4	b^2_3	b^2_4
0,38	0,20	0,65	0,23	0,69

Fuente: Elaboración propia, 2013

Cuadro 11. Cuadrados de los semiejes de las elipses estándar absolutas de confianza.

ka_2	ka_3	ka_4	kb_3	kb_4
1,5	1,1	2,0	1,2	1,1

Fuente: Elaboración propia, 2013

5. CONCLUSIONES

Se concluye que considerar la medida de las dos diagonales (polígono con diagonales), o sea dos distancias y dos acimutes más, no mejora en nada el primer prediseño de medición propuesto.

El prediseño de malla poligonal cerrada es el más económico porque implica el menor número de mediciones a realizar. Significa menor cantidad de personal a utilizar para ejecutar las medidas, menor uso de vehículos, gasto de combustible, uso de equipos, cálculos, que al final se traduce todo en términos de dinero sobre el costo de un proyecto.

Cada topógrafo puede revisar su prediseño de red de medición de acuerdo a la metodología que hemos desarrollado y escoger entre múltiples posibilidades, la que cumpla con la exactitud requerida para sus fines y a la vez que le resulte realizable dentro de las posibilidades de su presupuesto asignado a la obra de medición que le interesa llevar a cabo. Tampoco queda supeditado o sujeto a rígidos esquemas de figuras de redes que muchas veces dificultan su materialización final.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Blachut, T., Chrzanowski, A. & Saastamoinen, J. (1980). *Cartografía y levantamientos urbanos*. México, D.F.: Dirección General de Cartografía del Territorio Nacional.

Hübner, P. (1980). *Apuntes de ajuste de observaciones por mínimos cuadrados*.

Costa Rica, Heredia: Escuela de Topografía, Catastro y Geodesia, Universidad Nacional.

LITERATURA CONSULTADA

Mena, J. (2008). *Geodesia Superior*. España: Instituto Geográfico Nacional.

Mena, J. (2008). *Proyecciones Cartográficas y Geodesia Espacial*. España: Instituto Geográfico Nacional.

Núñez, A., Valbuena, J. & Velasco J. (1992). *G.P.S. La nueva era de la topografía*. España: Ediciones de las Ciencias Sociales S.A.

Trimble Navigation Limited. (2003). *Postprocessed Surveying (Training Guide)*. Estados Unidos, California: Trimble Navigation Limited.

Zakatov, P. (1981). *Curso de Geodesia Superior*. Rusia: Editorial MIR.

SOBRE EL AUTOR

Juan Araque Skinner.

Ingeniero Topógrafo y Geodesta. Profesor de la Escuela de Ingeniería Topográfica, Universidad de Costa Rica. Director de la Escuela de Ingeniería Topográfica, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Costa Rica. Apartado Postal: 2060, UCR, San José, Costa Rica. Teléfono 2511-5741. Facsímil: 2224-0571
 Correo electrónico: juan.araque@ucr.ac.cr

