

ISSN 1409-2441

Ingeniería

Revista de la Universidad de Costa Rica
Enero/Diciembre 1998 VOLUMEN 8 Nos. 1 y 2



METODO ANALITICO PARA CALCULAR EL FACTOR GEOMETRICO J DE ENGRANES RECTOS ESTANDARIZADOS

Alejandro Pacheco M¹

Resumen

En este artículo se presenta un método analítico para calcular el factor geométrico J para el diseño de engranes rectos como una alternativa al método gráfico estandarizado de la AGMA. El método desarrollado produce resultados que aproximan fielmente los valores AGMA para el caso de engranes fabricados con cortadores de generación y a la vez permite generar los valores del factor J , hasta ahora no disponibles, para el diseño particular de engranes fabricados con cortadores de conformación.

Summary

In this paper, an analytical method for calculating the geometry factor J of spur gears is presented as an alternative to the graphical method of the AGMA standards. The analytical method produces J values that approach closely the AGMA values for gears made by generating cutters, and additionally allows calculating J values for the particular design of gears made by form cutters.

1. INTRODUCCION

En este artículo se presenta un modelo matemático para calcular el llamado factor J de un engrane recto estandarizado. Los métodos clásicos y tradicionales para diseñar este tipo de engranes se basan en un procedimiento establecido por la *American Gear Manufacturers Association* (AGMA), donde, el factor de forma J se determina por medio de gráficas publicadas y patentadas por la misma AGMA.

Es importante aclarar que el método presentado en este artículo se basa en una revisión y reformulación extensiva del modelo matemático para calcular el factor J en engranes rectos, publicado por el autor previamente en esta revista (Pacheco, A. y Rodríguez, A., Vol. 6, No. 1, 1996). El modelo actual contiene mejoras de forma y de fondo. La nomenclatura y la simbología gráfica fueron simplificadas, se eliminó el proceso numérico iterativo para

localizar la sección crítica, el esfuerzo de flexión se calcula con una ecuación más exacta y se obtienen los radios de filete en la raíz del diente en forma diferenciada para engranes cortados por generación o conformación. En consecuencia, los nuevos resultados son más exactos y además permiten calcular valores del factor J exclusivamente para el diseño de engranes cortados con herramientas de conformación, lo cual se considera un aporte novedoso, ya que esta información no está contenida en los estándares de la AGMA, ni se encuentra publicada en la literatura disponible.

2. DEFINICIÓN DEL FACTOR GEOMÉTRICO J

Como primer paso para la formulación del modelo matemático del factor J , se requiere una clara identificación gráfica de los parámetros geométricos que estarán involucrados en el mismo. Para ello, considérese la figura NO.1 que muestra

¹ Ingeniero Mecánico M.Sc. Prof. Escuela de Ingeniería Mecánica, Univ. de Costa Rica

esquemáticamente un diente de engrane recto con perfil de evolvente y para el cual se define la siguiente simbología:

O:	centro del engrane.
H:	punto más alto de contacto.
P:	punto de paso sobre el perfil del diente
B:	punto inicial de la evolvente.
C:	punto sobre la curva de enlace en la raíz del diente que corresponde a la sección crítica.
G:	centroide del área crítica a la flexión en la base del diente.
GC:	plano que define a la sección crítica del diente.
Q:	punto de intersección entre la línea de acción de la carga y la línea o eje central del diente.
E:	centro instantáneo de la generatriz de la evolvente en el punto de contacto.
W:	carga normal al diente.
γ:	esfuerzo de flexión en la sección crítica.

t:	anchura basal del diente en la sección crítica.
h:	brazo de palanca de la carga W con respecto al centroide G del área crítica a la flexión.
a:	adendo
b:	dedendo
r_a:	radio del Círculo de adendo.
r_p:	radio del Círculo de paso.
r_b:	radio del Círculo base
θ:	ángulo de presión de la línea de transmisión con respecto al eje central del diente. Se le llamará ángulo de presión relativo.
θ_H:	valor del ángulo θ cuando la carga se aplica en el punto más alto de contacto H.
F:	ancho de cara del diente (no mostrado)
θ_p:	ángulo de presión nominal (no mostrado)

Para calcular el esfuerzo flector γ se recurre a la hipótesis de que el diente actúa como una viga empotrada sometida a flexión y comprensión en el área de unión con el cuerpo del engrane. Así:

$$\sigma = \left\{ \left(\frac{Mc}{I} \right) - \frac{Wr}{A} \right\} K_f \quad (1)$$

donde:

$$M = I r \omega \times W l = h \cdot W s e n e; \quad e = t/2; \quad 1 = \frac{F t^3}{12} \quad K_f = \text{factor de concentración de esfuerzos por fatiga}; \quad W_r = W \cos e; \quad A = F t$$

Sustituyendo términos en la ecuación No. 1 :

$$\sigma = K_f \frac{W \cos \theta}{F} \left\{ \frac{6h}{t^2} \tan \theta - \frac{1}{t} \right\} \quad (2)$$

La carga nominal W puede relacionarse con la carga transmitida nominal \sim de acuerdo con la relación:

$$W = \left(\frac{W_t}{\cos \phi} \right) m_N \quad (3)$$

donde: m_N = relación de compartición de carga.

Sustituyendo la ecuación NO.3 en la NO.2:

$$\sigma = K_f \frac{W_t \cos \theta}{F \cos \phi} m_N \left(\frac{6h}{t^2} \tan \theta - \frac{1}{t} \right) \quad (4)$$

Esta relación puede arreglarse de la manera siguiente:

$$\sigma = \frac{W_t P}{F l \left[m_N K_f \frac{\cos \theta}{\cos \phi} \left(\frac{6h}{t^2} \tan \theta - \frac{1}{t} \right) \right]}$$

donde: P = paso diametral.

Haciendo una analogía entre esta ecuación y la fórmula clásica de Lewis, se define el factor de forma J para el diente del engrane, como:

$$J = \frac{P}{K_f \cdot m_N \frac{\cos \theta}{\cos \phi} \left(\frac{6h}{t^2} \tan \theta - \frac{1}{t} \right)} \quad (5)$$

Así el esfuerzo flexor σ genérico puede expresarse según la relación más compacta:

$$CJ = \frac{W_t P}{F J} \quad (6)$$

3. FACTOR GEOMÉTRICO J DE LA AG

En un diente de engrane recto el esfuerzo flector máximo ocurre cuando la carga se aplica en el punto más alto de contacto. En esta posición, el ángulo B (ver figura No.1) adquiere el valor B_H y el punto de contacto coincide con el punto más alto de contacto que se denominará como punto H. Por lo tanto, el factor de forma J de la AGMA se define como $J = J(B = B_H)$, o bien:

$$J = \frac{K_f \cdot m_H \cos B_H}{\cos r} \frac{P}{t} \left(\frac{6h}{\tan B_H} - 1 \right)$$

De aquí en adelante el problema de calcular J consistirá en obtener los valores de todos los parámetros representados en la ecuación No.7

4. CARÁCTER ADIMENSIONAL DEL FACTOR J .

Un análisis de las dimensiones del factor J expresado según la ecuación NO.7 revela que éste es un parámetro adimensional. Aún más, sabiendo que para un engrane nonnalizado con dientes de evolvente, todas las dimensiones del diente son directamente proporcionales a P , es fácil concluir que el factor J no solo será adimensional sino que será independiente del valor de P .

5. PARÁMETROS BÁSICOS INDEPENDIENTES

Siendo J un factor puramente geométrico, su valor en última instancia dependerá de los siguientes parámetros básicos que definen la

geometría de cualquier sistema de engranes nonnalizados:

- Número de dientes del engrane bajo estudio N .
- Número de dientes del engrane compallero N_e
- Angulo de presión nominal ϕ .
- Sistema estandarizado del tamaño del diente.

6. VALOR DE PASO DIAMETRAL P

Por conveniencia en los procesos de cálculo involucrados en el modelo matemático, se trabajará con un paso diametral unitario, es decir $P = 1$ diente / pul.

7. SISTEMAS ESTANDARIZADOS DE DIENTES.

En la tabla No.1 se muestra lista de los estándares más usados en la fabricación de engranes rectos de paso diametral. Los coeficientes que determinan el tamaño y forma del diente son aquellos que relacionan el adendo, el dedendo, y el radio de filete en la raíz con el paso diametral respectivamente.

En el caso de engranes cortados con fresa madre o cualquier otra herramienta que produzca dientes de generación, las dimensiones fundamentales del diente se obtienen con las fórmulas siguientes:

$$a = \frac{K_a}{P} \quad (8)$$

$$b = \frac{K_b}{P} \quad (9)$$

$$r_i = \frac{K_r}{P} \quad (10)$$

$$r_f = r + \frac{(b - r_f)y}{rp + b - r_f} \quad (11)$$

El factor r_f es el radio de curvatura de la punta del cortador de generación y r_c es el radio de filete aproximado en la raíz del diente del engrane producido [Peterson, 1974]. Este valor de r_f se dice que es aproximado porque en los engranes de generación la curva de enlace en la raíz del diente es una curva trocoidal, más parecida a una porción de elipse que a un círculo.

Las ecuaciones No. 8, 9, Y 10 son también válidas para engranes cortados con fresas de conformación. Para este caso, la curva de enlace en la raíz del diente coincide con la

forma exacta de la punta del cortador, la cual posee un borde circular cuyo radio está dado por la relación estandarizada siguiente (Casillas, AL., 1988) :

$$r_f = r_c = \frac{0.3}{P} \quad (12)$$

Es importante señalar que las relaciones anteriores son válidas también para los engranes estandarizados del sistema de módulo, con solo sustituir el factor $1/P$ por el módulo m .

Angulo de presión ϕ (°)	Constante de adendo K_a	Constante de Dedendo K_b	Constante de radio de la punta del cortador K_r
20	1.0	1.2500	0.3000
20	1.0	1.4000	0.3500
20	1.0	1.1570	0.2390
20	0.8	1.0000	0.3040
25	1.0	1.2500	0.3000
25	1.0	1.3500	0.2447
25	1.0	1.3154	0.2700

TABLA No.1. Sistemas estandarizados de dientes de uso común para engranes rectos cortados por generación

8. DETERMINACIÓN DEL ÁNGULO eH

El ángulo eH corresponde al formado entre la línea de acción de la carga W cuando esta se aplica en el punto más alto de contacto H y la línea central del diente, tal como se muestra en la figura NO.I. Su determinación entonces depende de ubicar precisamente dicho punto más alto de contacto, análisis que se presenta a continuación, con la ayuda de la figura No.2, en la cual se utiliza la siguiente nomenclatura complementaria:

- O: centro del engrane analizado
- Oc: centro del engrane compallero

- P : punto de paso sobre la línea de centros
 H : punto más alto de contacto
 B : origen del perfil de evolvente sobre el círculo base
 r_{ac} : radio de adendo del engrane compañero
 r_{pc} : radio de paso del engrane compañero
 r_{bc} : radio base del engrane compallero
 K : primer punto de contacto
 L : último punto de contacto
 Pb : paso circular base
 r_H, CPH : ángulos involumétricos

Analizando el triángulo OEQ, se nota que el ángulo en Q es igual a eH , por lo tanto :

$$\theta_H = 90 - \gamma_H$$

A su vez, por relaciones involumétricas, el ángulo r_H puede obtenerse como:

$$r_H = r_j \cdot \frac{90}{N} - \frac{180}{N} \cdot (\tan r_j - \tan CPH) \quad (14)$$

donde, gracias al triángulo OEH :

$$\tan \varphi_H = \frac{EH}{r_b} = \left(\frac{r_p}{r_b} + \frac{r_{pc}}{r_b} \right) \operatorname{sen} \phi - \sqrt{\left(\frac{r_{ac}}{r_b} \right)^2 - \left(\frac{r_{bc}}{r_b} \right)^2} + \frac{P_b}{r_b} \quad (15)$$

Expresando los diferentes radios en función de los números de dientes N y N_c y después de algunas transformaciones, se logra obtener:

$$\tan CPH = \frac{2rc}{N} + \left(1 + \frac{N_c}{N} \right) \tan r_j - \frac{N_c}{N} \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{2K_a}{N_c}}{\cos r_j} \right)^2 - 1} \quad (16)$$

Ahora se combinan las ecuaciones No.13, 14 Y 16 para obtener el ángulo θ_H en grados de la manera siguiente:

$$\theta_H = 90 - \phi - \frac{270}{N} + \frac{180N_c}{\pi N} \left[\sqrt{\left(\frac{1 + \frac{2k_a}{N_c}}{\cos r_j} \right)^2} - 1 - \tan r_j \right] \quad (17)$$

Nótese que el valor de θ_H resultante será en grados, y que como se había establecido antes, dependerá de los parámetros fundamentales N , N_c ' ϕ , mientras que el sistema estandarizado del diente fijará el valor del coeficiente K_a .

9. CÁLCULO DE h, t

Como se puede apreciar en la figura NO.1, el cálculo de los valores de h y t depende de la ubicación de la sección crítica, es decir aquella sección en la cual el esfuerzo ω resulte ser máximo.

Con ayuda de la figura No.3, es posible realizar un análisis matemático que interrelacione las variables h y t , utilizando

funciones geométricas de la evolvente y del arco de enlace en la raíz del diente. Con esto se logra expresar t en función de h . Luego derivando la función de esfuerzo dada por la ecuación No.4, se puede obtener el valor de h que maximiza dicha función. Este procedimiento conduce a ecuaciones trascendentales, cuya solución requiere la aplicación de uno o más métodos numéricos. Este camino es el más riguroso y correcto desde un punto de vista estrictamente matemático.

Como ya se demostró anteriormente (ver ecuación NO.4); el esfuerzo de tensión en el punto C (figuras NO.1 y NO.3) puede expresarse como:

$$\omega = \left(\frac{Kf \cdot m b \cos \theta_H J}{F \cos r_j} \right) \left(6 \frac{h}{r} \tan \theta_H - \frac{1}{t} \right) \quad (18)$$

Para una geometría dada de un diente de engrane, existirá solo una posición definida del ángulo θ_H (ver figura NO.3), que corresponderá al valor máximo del esfuerzo. Esta posición podría hallarse matemáticamente por el teorema de máximos y mínimos si se logra expresar ω en función exclusiva del ángulo de posición θ_H . Con ayuda de la figura No.3, se observa que:

$$h = \overline{OQ} - \overline{OG}$$

donde:

$$OQ = \frac{OE}{\sin \theta_H} = \frac{r_b}{\sin \theta_H}$$

$$OG = OI - AC \operatorname{sene} = r_A \cos \beta_A - r_f \operatorname{sene}$$

$$r_A = r_D + r_f$$

Por lo tanto:

$$h = \frac{r_b}{\sin \theta_H} - r_A \cos \beta_A + r_f \operatorname{sene} \quad (20)$$

Por otro lado, el semigrosor basal del diente es :

$$\frac{t}{2} = Al - AC \operatorname{cose} = r_A \operatorname{sene} \beta_A - r_f \operatorname{cose} \quad (21)$$

$$t = 2(r_A \operatorname{sene} \beta_A - r_f \operatorname{cose})$$

El ángulo β_A depende de la forma del perfil del flanco del diente y se calculará luego.

El esfuerzo en la raíz del diente en un punto genérico puede expresarse, en virtud de la ecuación NO.18 como:

$$eY = K \left(\frac{6h}{t^2} \tan \theta_H - \frac{1}{t} \right)$$

donde K es una constante geométrica y dinámica cuyo valor no depende de h o t .

La sección crítica corresponde a valores de h y t que maximizan el esfuerzo de flexión, por lo tanto, aplicando el principio del máximo de una función de dos variables:

$$deY = \frac{\partial h}{\partial m} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

Derivando la función eY e igualándola a cero:

$$K \left(\frac{6}{t^2} \tan \theta_H \right) dh + K \left(\frac{-12h \tan \theta_H}{t^3} + \frac{1}{t^2} \right) dt = 0$$

Despejando el gradiente dh/dt y simplificando, se obtiene:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2h}{t} \frac{1}{6 \tan B_H} \tag{22}$$

Ahora con ayuda de las ecuaciones NO.20 y 21 , se expresa el gradiente dh/dt como:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh/de}{dI/dI/de} = \frac{r_i \cos e}{2r_j \text{sene}} = \frac{1}{2 \tan e} \tag{23}$$

Igualando las ecuaciones NO.22 y 23 :

$$\frac{2h}{t} \frac{1}{6 \tan BH} = \frac{1}{2 \tan e}$$

Sustituyendo h Y t por las ecuaciones NO.20 y 21 respectivamente en la ecuación anterior, se logra la siguiente ecuación trascendental para calcular el ángulo e :

$$\cot e = 2 \frac{(rb/\text{sene}BH) - r_A \cos PA + r_j \text{sene}}{r \text{Asen}PA - r_f \cos e} - \frac{1}{3 \tan B_H} \tag{24}$$

Esta ecuación puede ser que resulte para el ángulo e por algún método numérico apropiado.

Por inspección de la figura No.3, es obvio que la solución debe estar comprendida en el ámbito $0^\circ \sim e \sim 90^\circ$

Con el propósito de investigar cuáles valores del ángulo e se consideran típicos, se resolvió la ecuación

NO.21 por medio de un programa de computadora para diversas combinaciones de N (20, 30, 60, 1000) Y N_c (20, 30, 60, 1000) , encontrándose que todas las soluciones quedaban comprendidas entre $e = 20^\circ$ y $e = 35^\circ$.

Igualmente se comprobó que la función de esfuerzo, dada por la ecuación NO.18 , es poco sensible a la variación del ángulo e dentro del

intervalo citado. Por esta razón, para fines prácticos se asume que la sección crítica se localiza en un valor $e = 30^\circ$ para todos los casos, independientemente de los valores de los demás parámetros . Consecuentemente, en el modelo matemático propuesto se fijará el valor $e = 30^\circ$. Este resultado concuerda con los hallados por investigadores japoneses al usar el método de elementos finitos (Tanaka, Kohida, Yamada, 1986).

10. CÁLCULO DE PA PARA DIENTES CON TRANSICIÓN DE PERFIL POR ENCIMA DEL CÍRCULO BASE.

En la figura NO.4 se ilustra este tipo de situación donde el perfil del diente es de evolvente en toda su extensión por arriba del arco del filete o entalle de raíz. Esta situación ocurre cuando la geometría del diente es tal que el punto de transición T, entre el arco de enlace DT y la curva de evolvente, ocurre por

encima del Círculo base. Matemáticamente lo anterior puede establecerse como $r_T = r_b + r$, siendo r la coordenada radial del punto T.

$$\beta_A = \varphi_A - \gamma_T \quad (25)$$

Analizando el triángulo OAC, se ve que:

$$\varphi_A = \arccos\left(\frac{r_b}{r_A}\right) \quad (26)$$

Por relaciones de la involueta:

$$r_T = r_b + \frac{90}{N} \left(\frac{180}{\pi} (\tan \phi - \tan \gamma) \right) \quad (27)$$

Pero a su vez, analizando el triángulo OCT:

$$\tan \gamma = \sqrt{\left(\frac{r_A}{r_b}\right)^2 - 1} - \frac{r_f}{r_b} \quad (28)$$

Combinando las ecuaciones No.25, 26, 27, Y28, se resuelve para β_A obteniéndose:

$$\beta_A = \frac{90}{N} - \phi + \arccos\left(\frac{r_b}{r_A}\right) + \frac{180}{\pi} \left(\tan \phi + \frac{r_f}{r_b} - \sqrt{\left(\frac{r_A}{r_b}\right)^2 - 1} \right) \quad (29)$$

11. CÁLCULO DE β_A PARA DIENTES CON TRANSICIÓN DE PERFIL POR DEBAJO DEL CÍRCULO BASE.

Cuando el Círculo de dedendo es menor al círculo base, el perfil del diente experimenta una transición en el punto que alcanza al Círculo base. Por encima del Círculo base, el perfil es la involuta de este Círculo; sin embargo por debajo del Círculo base, el perfil del flanco quedará definido por la fonna y la

Por ahora se procederá a calcular el ángulo β_A . Por inspección de la figura No.4, se observa que:

acción cinemática de la herramienta de corte. Para fines prácticos se asumirá que esta parte del perfil es una línea recta radial entre los Círculos base y de enlace, tal como se muestra en la figura No.5. Esta suposición resulta particulannente acertada para dientes cortados con fresas de conformación, no así para los dientes de engranes fabricados por generación cuyo flanco por debajo del Círculo base es una compleja curva trocoidal. Esta diferencia geométrica entre dientes cononnados y dientes generados explica porque estos últimos

son un poco más resistentes al esfuerzo de flexión. Por lo tanto, el uso de este modelo de flanco radial rectilíneo, producirá valores de J especialmente adecuados para engranes de conformación, en tanto que su uso para

engranes de generación, producirá resultados conservadores, lo cual no resta validez o utilidad al modelo como herramienta segura de diseño.

Para calcular el ángulo β_A mostrado en la figura No.5, se procede de la manera siguiente:

$$f\beta_A = \frac{t_b}{2r_b} + \phi$$

donde:

$$\beta_B = \frac{t_b}{2r_b} ; t_b = 2r_b \left(\frac{\pi}{2N} + \text{inv}\phi - \text{inv}\phi_B \right) ; \text{inv}\phi_B = \phi_B = 0 ; \text{inv}\phi = \tan\phi - \phi$$

Así:

$$\beta_B = \frac{\pi}{2N} + \tan\phi - \phi \tag{31}$$

Trabajando en el triángulo OAT:

$$\text{seny} = \frac{Al'}{OA} = \frac{r}{r_A}$$

$$r = a / \text{csen} \left(\frac{r}{r_A} \right) \tag{32}$$

Sustituyendo las ecuaciones NO.31 y 32 en la 30:

$$f\beta_A = \frac{\pi}{2N} + \tan\phi \cdot \phi + \text{arcsen} \left(\frac{r}{r_A} \right) \text{ en radianes.}$$

Finalmente, convirtiendo este valor a grados:

$$f\beta_A = \frac{90}{N} + \frac{180}{\pi} \tan\phi \cdot \phi + \text{arcsen} \left(\frac{r}{r_A} \right) \tag{33}$$

12. CONDICIONES DE TRANSICIÓN ENTRE UN PERFIL SIN FLANCO RECTILÍNEO y UNO CON FLANCO RECTILÍNEO.

La condición de transición ocurre cuando en la figura NO.5 el radio del punto de transición T, coincide con el radio base, es decir: $r_T = r_b$

Habrà flanco rectilíneo solamente si $r_A \geq r_b$. Este criterio será útil para saber si el ángulo β_A deberá calcularse con la ecuación NO.29 (sin flanco rectilíneo) , o con la ecuación NO.33 (con flanco rectilíneo).

En el triángulo OAT de la figura No.5, se observa que :

$$r_T = OT = \sqrt{r_A^2 - r_f^2}$$

Considerando que $r_f \ll r_A$ para fines prácticos se tomará $r_T = r_A$.

Ahora será fácil escoger la ecuación correcta para calcular β_A :

Usar ecuación NO.29 si $r_A > r_b$.

Usar ecuación NO.33 si $r_A < r_b$.

$$K_t = H + \left(\frac{t}{r_f}\right)^L \left(\frac{t}{h}\right)^M \tag{3.i}$$

donde: $H = 0.340 - 0.4583662 \sim$

$L = 0.316 - 0.458366 \sim$

$M = 0.290 + 0.4583662 \sim$

$r_p =$ ángulo de presión nominal en radianes.

En caso de igualdad ($r_A = r_b$) , cualquiera de las ecuaciones deberá producir el mismo resultado.

13. FACTOR DE CONCENTRACIÓN DE ESFUERZOS POR FATIGA K_f

El factor K_f depende del factor teórico o geométrico de concentración de esfuerzos K_t y de la sensibilidad a la entalla q , según la relación:

$$K_f = 1 + q(K_t - 1)$$

Como una medida conservadora y por simplicidad, se asumirá un valor unitario para q ; con lo cual $K_f = K_t$.

En la literatura consultada (Deutschman, AD., 1985, p.577; Mitchiner, RG. y Mabie, H. H.,1980 ; Peterson RE., 1974; Shigley, J. y Mitchell, L., 1985, p. 635), aparecen diversas fórmulas empíricas para la determinación del factor K_t . Haciendo una síntesis de estas fórmulas, se propone calcular el K_t con la ecuación siguiente:

$r_f =$ radio del filete en la raíz del diente (ver ecuaciones NO.11 y 12).

14. RELACIÓN DE COMPARTICIÓN DE CARGA M_N .

La relación de compartición de carga se define como la razón entre la carga transmitida por una pareja de dientes en un instante dado y la

carga total que se transmite a lo largo de la línea de transmisión. Consecuentemente el valor de mN es inferior a la unidad mientras exista algún grado de compartición de carga entre dos o más parejas de dientes. En el caso de los engranes rectos estandarizados, solo existe compartición de carga durante parte del ciclo de contacto, dándose una parte del ciclo sin ninguna compartición de carga, el cual se inicia precisamente en el punto más alto de contacto (fase o posición de máximo esfuerzo flector). Dada la definición del factor mN , este tendrá valor unitario en la fase del punto más alto de contacto para el caso de los engranes rectos. Es decir que se utilizará mN en el cálculo del factor J respectivo.

15. COMPROBACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO.

Con el propósito de probar el funcionamiento del modelo matemático y verificar la validez de sus resultados, se decidió generar datos para graficar curvas del factor J en función del número de dientes del engrane y compararlas con las curvas normalizadas de la AGMA.

Para efectos de esta comparación, se escogió trabajar con un sistema de dientes estandarizado de altura completa con las siguientes especificaciones: $r_j = 20$, $K_a = 1$, $K_b = 1.4$, $K_r = 0.35$ para generación y $K_r = 0.30$ para conformación.

Con el fin de cubrir valores extremos y medios de la familia de curvas AGMA, se decidió generar por medio del modelo matemático, únicamente las curvas para los siguientes valores del número de dientes del engrane compallero: $N_e = 17$, $N_c = 50$ y $N_c = 1000$.

Programando el modelo matemático en una hoja electrónica, se calcularon los valores del factor J para los siguientes valores del número

de dientes del engrane principal N : 20, 30, 60, 80, 100, 200, 300 Y 500.

Los resultados se muestran en las figuras NO.6, 7 y 8 que contienen las gráficas de los factores J en función del número de dientes del engrane analizado N para los datos anteriores. Analizando estas curvas, se pueden sintetizar las siguientes observaciones:

- Para engranes cortados por generación, el modelo matemático produce valores del factor J muy similares a los valores estandarizados de la AGMA, siendo las curvas prácticamente coincidentes para $N \geq 100$ dientes y existiendo una ligera desviación entre las curvas para $N < 100$ dientes.
- Para fines de diseño, la desviación del modelo matemático con respecto a la curva AGMA para engranes de generación, es relativamente pequeña (inferior al 10 % en el peor caso) y benévola en todo caso, ya que esta desviación produciría un ligero sobrediseño del engrane.
- Para engranes cortados por conformación, el modelo matemático produce una curva del factor J de forma similar a la de engranes cortados por generación, pero de valores notoriamente inferiores, lo cual no debe interpretarse como un error del modelo, sino como un resultado fiel a la realidad de que los engranes conformados tienen dientes geoméricamente diferentes y más débiles a la flexión que los dientes de los engranes de generación. Desafortunadamente, la normalización AGMA no incluye curvas particulares del factor J para engranes de conformación y tampoco se lograron encontrar en la literatura consultada valores publicados del factor J para engranes de conformación que sirvieran de referencia o comparación.

16. CONCLUSIONES

Con base en los resultados obtenidos, se pueden derivar las conclusiones siguientes:

- El modelo matemático desarrollado aproxima fielmente a las curvas del factor J de la AGMA para engranes de generación, existiendo leves desviaciones cuando el engrane tiene menos de 100 dientes; las cuales son benévolas para efectos de un diseño conservador.
- Las desviaciones con respecto a los valores AGMA se atribuyen principalmente a la forma de modelar el arco de la raíz del diente creado por una cremallera de generación. La forma real y exacta de este arco corresponde a una curva conocida como "trocoide", la cual fue simulada o aproximada mediante un arco circular en el modelo matemático. Por otro lado, de acuerdo con Mitchiner y Mabie (Transactions of the ASME, Vol. 104, January 1982), los factores J de la AGMA fueron obtenidos empleando técnicas gráficas, posiblemente dibujando los perfiles exactos de los dientes por medio de involutómetros de cremallera.
- El modelo matemático desarrollado es particularmente útil para calcular el factor J de los engranes cortados por fresas de conformación. En este caso el arco de raíz del diente de conformación es realmente un arco circular, que corresponde exactamente al arco circular utilizado por el modelo matemático, de tal forma que no se introduce error alguno en este proceso. Debido a la total ausencia de valores del factor J para engranes de conformación en la literatura, es práctica común de diseño asumir que dichos factores J son iguales a los valores AGMA para engranes de generación. Esta práctica conduce a un diseño inseguro del engrane y debe evitarse. Se considera que el modelo matemático aquí propuesto, significa un aporte de singular importancia como herramienta de cálculo para el diseño correcto de engranes fabricados por

conformación, los cuales representan la mayoría de los engranes producidos en los países en desarrollo, incluyendo a Costa Rica.

- Se encontró que para localizar en forma exacta la sección crítica a la flexión en la base del diente, se debe resolver una compleja ecuación trascendental para el ángulo ϕ ; por medio de técnicas numéricas. Estrictamente, el ángulo ϕ tendrá un valor particular para cada conjunto de valores de N , N_e , r_j . Sin embargo, se encontró que para efectos prácticos, el modelo matemático funciona razonablemente bien cuando se fija la sección crítica en la posición de $\phi = 30$.

17. BIBLIOGRAFIA

1. Casillas, AL. *Máquinas*. Edición 34. Edición Hispanoamericana. MELSA España, 1988.
2. Deutschman, Aaron D. et al. *Diseño de Máquinas*. Segunda edición. CECSA México, 1987.
3. Dudley, Darle W. *Manual de engranes*. Compailia Editorial Continental S.A México, 1973.
4. Faires, V. M. *Diseño de Elementos de Máquinas*. Montaner y Simon, S.A. España, 1970.
5. Giesecke, Frederick E. et al. *Dibujo Técnico*. Sexta edición. Limusa. México, 1989.
6. Hall, A S. et al. *Teoría y Problemas de Diseño de Máquinas*. McGraw-Hill. México, 1971.
7. Mitchiner, R. G. et al., *The determination of the Lewis Form Factor and the AGMA Geometry*
8. *Factor J for External Spur Gear Teeth*. Transactions of the ASME, Vol. 104: 148 - 158, Jan. 1982.

9. Pacheco, A. et. al., *Modelo matemático para calcular el factor geométrico J en engranes rectos*. Ingeniería 6 (1) : 81-96, 1996, San José, Costa Rica.
10. Peterson, RE. *Stress Concentration Design Factors*. John Wiley. 1974.
11. Shigley, Joseph y Charles Mischke. *Diseño en Ingeniería Mecánica*. Quinta edición. McGraw-Hill Interamericana S.A. México, 1990.
12. Shigley, Joseph y Larry Mitchell. *Diseño en Ingeniería Mecánica*. Cuarta edición. McGraw-Hill. México, 1985.
13. Shigley, Joseph y JoIm Uiker. *Teoría de Afáquinas y Afecanismos*. McGraw-Hill Interamericana S.A. México, 1983.
14. Tanaka, M. ; Kohida H. and Yamada A. *Stress Ana-yses of Spur Gears in Consideration of Specific Sliding*. Bulletin of JSME, Vol. 29, No. 250, April 1986. p. 1319 - 1325.

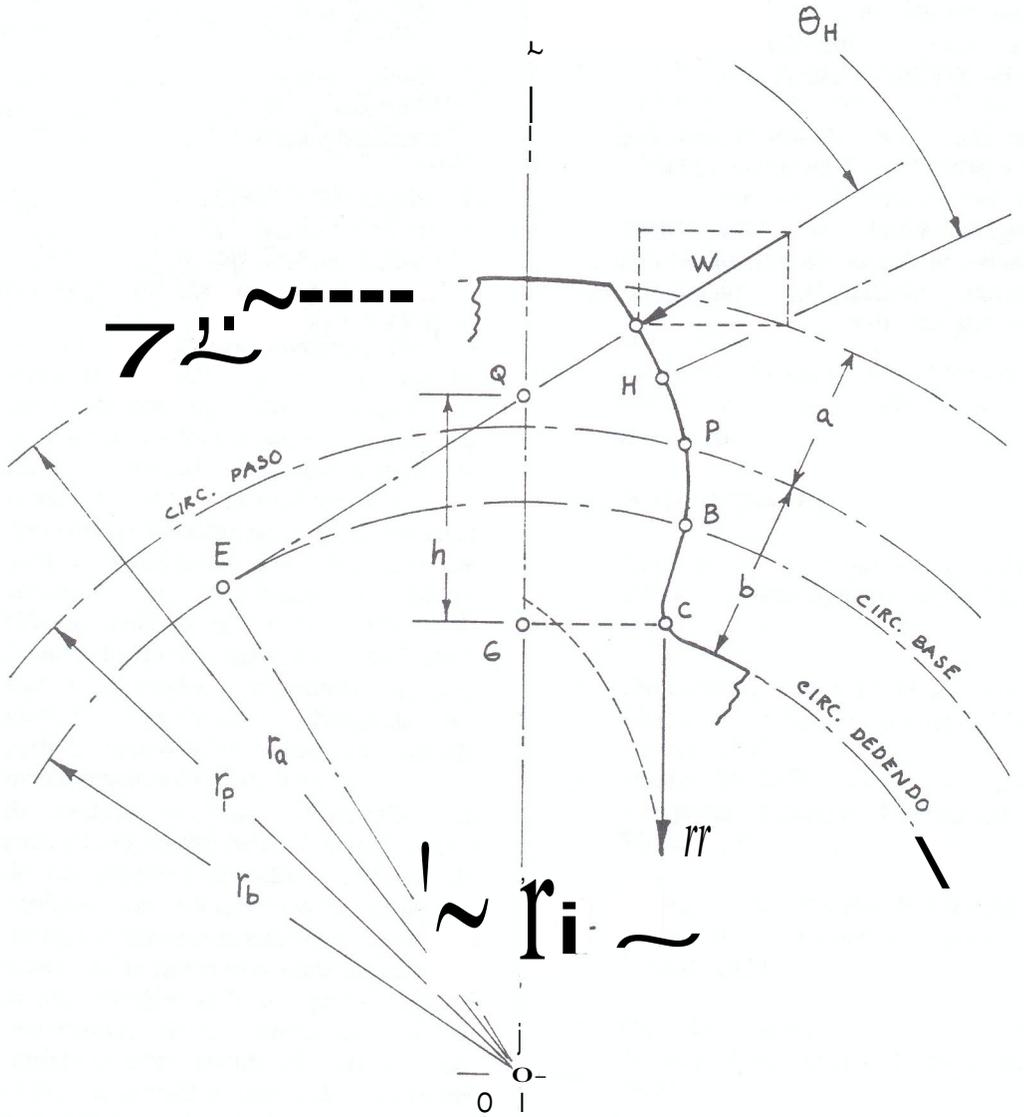


Figura 1. Diente de engrane recto con perfil de evolvente.
Parámetros geométricos básicos.

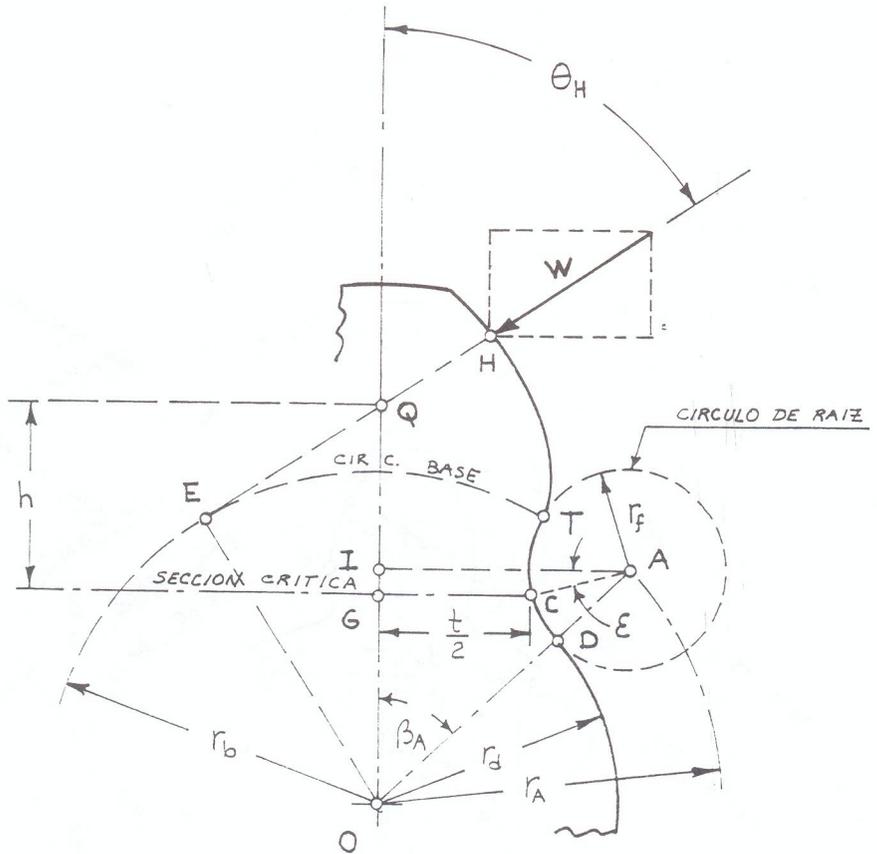


Figura 3. Determinación de la sección crítica. Valores de h y t .

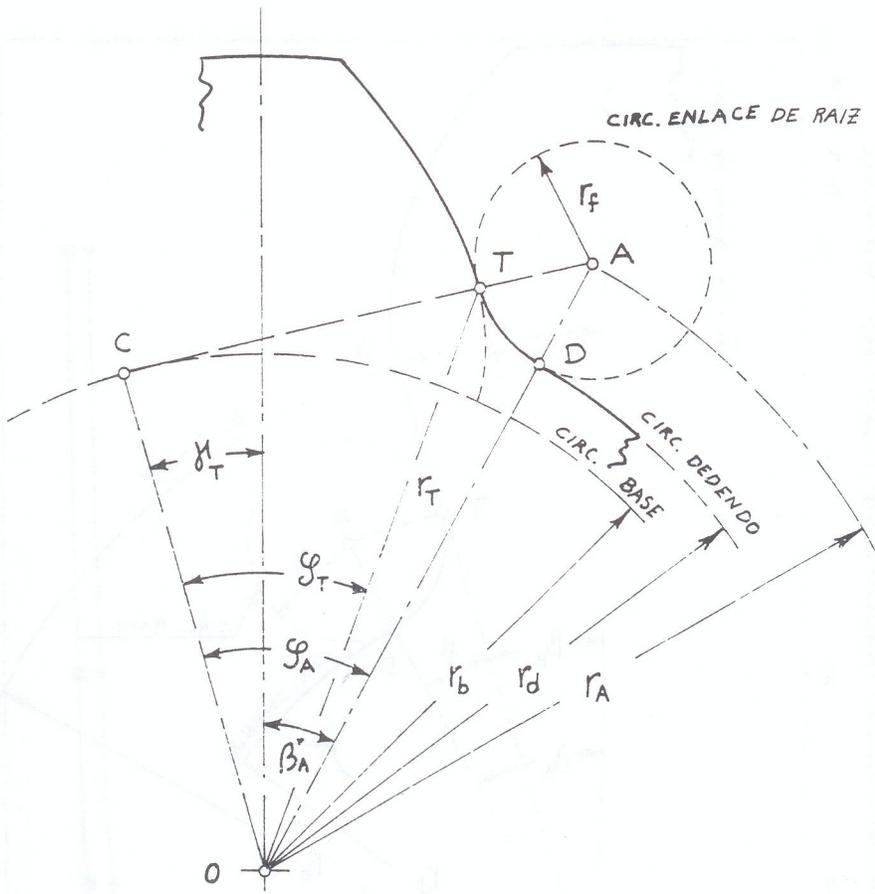


Figura 4. Diente de evolvente con transición de raíz por encima del círculo base.

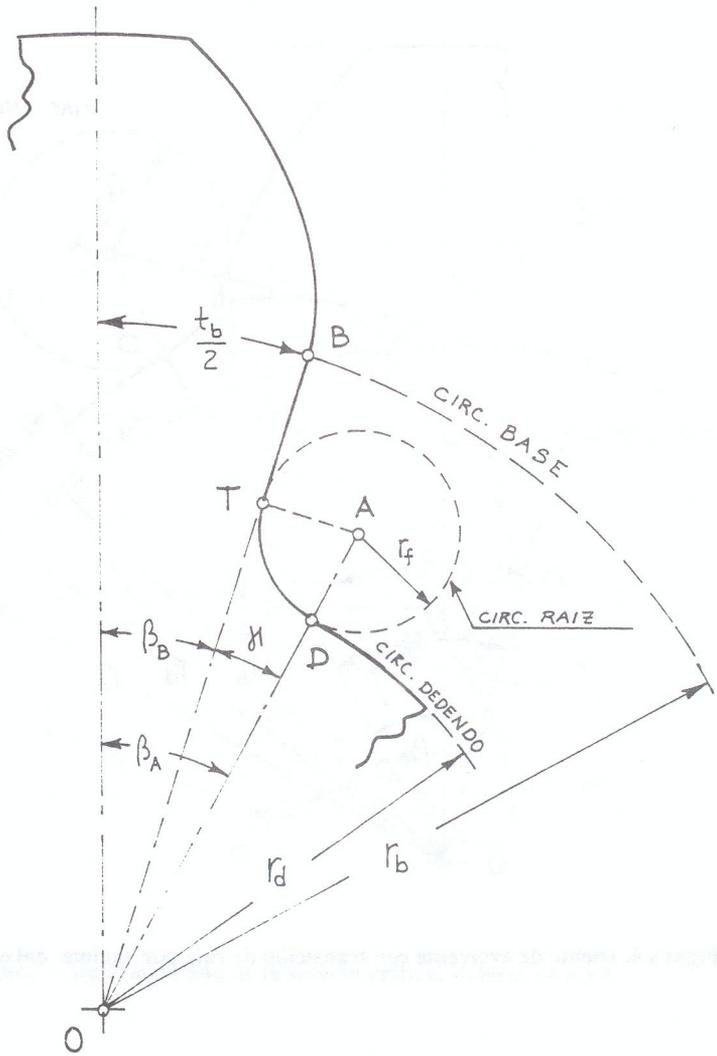


Figura 5. Diente de evolvente con tradición de raíz por debajo del círculo base.

