

La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería

The Problem of Teaching and Learning Calculus in Engineering

José Ángel García Retana¹

Sede Guanacaste
Universidad de Costa Rica
Guanacaste, Costa Rica
jose.garcia@ucr.ac.cr

Recibido: 30 abril 2012 **Aceptado:** 18 febrero 2013 **Corregido:** 17 junio 2013

Resumen: El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, en general, y del cálculo, en particular, presentan una de las mayores dificultades para los estudiantes de nivel universitario, incluidos los estudiantes de las carreras de Ingeniería. El abordaje de este problema dista mucho aún de encontrar soluciones precisas y efectivas. La tendencia a reducir a procesos aritméticos y algorítmicos el álgebra que sirve de soporte al aprendizaje del cálculo solo ha complicado más las cosas porque lleva a una descontextualización de la disciplina. Se hace entonces necesario que los docentes en cálculo reflexionen sobre las características propias de lo que se entiende por Ingeniería para procurar poner el cálculo al servicio de esta, ya que el papel que desempeña es determinante.

Palabras claves: Matemáticas, álgebra, cálculo, Ingeniería, aprendizaje, enseñanza.

Abstract: Teaching and learning Mathematics, and specifically Calculus, represents one of the major difficulties for college students, including engineering students. So far, the methods used to face such difficulties have not been successful; reducing the basic algebra to arithmetic and algorithmic processes has led to a process of de-contextualization of that discipline. Thus, calculus educators need to reflect on the characteristics of engineering in order to make calculus an educational instrument for engineering education.

Keywords: Mathematics, Calculus, Engineering, learning, teaching.

Introducción

Investigaciones realizadas desde la década de 1980 revelan que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas constituye uno de los problemas más significativos dentro de cualquier modelo educativo. Los niveles de promoción y repetición en los cursos de matemáticas, tanto en la educación media como en los cursos universitarios, son dos indicadores de esta problemática, cuya dimensión humana se encuentra ligada a la frustración, tanto de los educandos como de los educadores, de ahí la importancia de ser analizados.

En la sociedad actual no se discute sobre la importancia y pertinencia del aprendizaje de las matemáticas. Dicho aprendizaje siempre ha ocupado un lugar relevante en la generación

¹ Lic. Enseñanza de las Matemáticas UCR 1994. Profesor en Secundaria por 14 años y UCR Sede Guanacaste 12 años. Reside desde 1996 en Liberia, Guanacaste, donde ha desarrollado su labor docente. Actualmente cursa la Maestría en Educación con énfasis en Desarrollo Cognitivo en la Universidad Virtual del Instituto Tecnológico de Monterrey, México, becado por la Organización de Estados Americanos (OEA). Se desempeñó como investigador colaborador en proyectos desarrollados por el Instituto de Investigación para el Mejoramiento de la Educación Costarricense (IIMEC).

de conocimientos y cultura por su papel en las Ciencias Naturales, Sociales, Económicas, y más reciente en la Ciencias de la Comunicación y la Información (Ministerio de Educación Pública, 2012). Se considera además que tal aprendizaje contribuye a que el individuo desarrolle recursos cognitivos y metacognitivos (Rigo, Paéz y Gómez, 2009; Gómez, 1991); sin embargo, no se tiene completamente claro cómo este aprendizaje se da, por lo que existen dudas de que se estén logrando los aspectos planteados.

Frecuentemente se asocia a las matemáticas con el “razonamiento correcto”, definido por la lógica aristotélica, y se dejan de lado los aspectos motivacionales y subjetivos del educando. Sin embargo, variables como la motivación, la afectividad, la imaginación, la comunicación, los aspectos lingüísticos y la capacidad de representación juegan un papel fundamental en la conformación de las ideas matemáticas en los estudiantes (Cantoral, 2002), aunque en general estos se han dejado de lado dificultando el aprendizaje de la disciplina.

Lo anterior ha llevado a que las matemáticas se enseñen de manera masiva, descontextualizada y algoritmizada, lo que convierte su aprendizaje en un proceso formal, ligado a una serie de reglas, axiomas, postulados y teoremas, constituyendo estos aspectos un fin en sí mismo lejos de la realidad cotidiana, incluso en muchos casos tal aprendizaje se reduce a un nivel que roza con la aritmética gracias al uso de calculadoras, donde lo único que se vuelve importante es la obtención, ojalá correcta, de las respuestas a los ejercicios presentes en algún texto (García, 2009) o propuestos por el docente.

En el caso del cálculo para las carreras de Ingeniería, su aprendizaje se da en marco contradictorio, se aduce que este constituye la base del desarrollo profesional del futuro Ingeniero; sin embargo, su enseñanza se ha formalizado a través de uso y abuso del álgebra (Artigue, 1998; Camarena, 2009), e incluso se ha aritmetizado en el marco expuesto.

Debido a esto, el aprendizaje del cálculo tiende a presentar un alto nivel de descontextualización y desarticulación con respecto a los restantes cursos de las carreras (particularmente de Ingeniería), lo que obliga al educando a realizar la titánica labor de ser él quien procure integrar los distintos saberes aprendidos como un todo, aspecto que evidentemente no es fácil de lograr. Frente a esto, ha surgido la opción de un aprendizaje y enseñanza del cálculo basado en retomar el origen histórico de la disciplina, de manera tal que esta contribuya a resolver problemas ligados a la naturaleza y el aprovechamiento óptimo de sus recursos (Zúñiga, 2007; Camarena, 2010b).

De esta manera, resulta vital que el docente que enseña cálculo reflexione sobre la problemática que tanto sus estudiantes como él mismo enfrentan, para ser capaz de determinar posibles causas y proyectar consecuencias, y así replantear su papel, dado que dependiendo de la percepción de su propio trabajo, puede inducir al educando a ver en las matemáticas un recurso formalizado y frío que vale por sí mismo o un instrumento para resolver problemas, dejando los formalismos para los matemáticos profesionales.

Dificultades del aprendizaje de la matemática en el nivel universitario (cálculo)

En la sociedad contemporánea se considera a las matemáticas como una de las disciplinas de conocimiento más importantes, esto por cuanto la disciplina puede contribuir a que los estudiantes logren desarrollar sus capacidades de exploración, justificación, representación, discusión, descripción, investigación y predicción (Idris, 2009; Ministerio de Educación Pública, 2012); aspectos que contribuyen de manera significativa al desarrollo de “competencias”, entendidas estas como las destrezas, conocimientos, aptitudes y actitudes, disposición al aprendizaje, habilidades y destrezas, capaces de generar un capital cultural (desarrollo personal), un capital social (participación ciudadana) y un capital humano (capacidad para ser productivo) (Delors, 1997; Frade, 2009; Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, 2006).

Lo anterior es posible si consideramos que a través de las matemáticas el sujeto cognoscente puede aprender a organizar y estructurar la información que percibe o recibe en una situación cotidiana o creada intelectualmente, con el fin de identificar los aspectos más relevantes, descubrir regularidades, relaciones y estructuras que le permitan hacer conjeturas e inferencias a partir de proposiciones elementales, así como generalizar resultados a partir de determinados comportamientos constantes o lograr demostraciones (Guevara, 2007).

Si estas percepciones se pierden es posible que se genere un desconocimiento de qué es y para qué hacer matemática, cuál es su papel en las demás ciencias y áreas del conocimiento, por qué y para qué se deben abordar en un programa de educación matemática determinados contenidos curriculares en particular y no otros. Se estimula así en los educandos la generación de sentimientos adversos, que se traducen en desmotivación al percibir que las matemáticas están desvinculadas de la vida cotidiana (Cantoral, 2002), aspecto que puede estar asociado con los bajos niveles de promoción en todos los estratos del sistema escolar, incluido el universitario, independientemente de las carreras universitarias.

Usualmente se relaciona a las matemáticas con el desarrollo tecnológico, siendo este uno de los pilares de la Sociedad del Conocimiento, por lo que su aprendizaje y enseñanza se han constituido en asuntos de mayor interés e importancia particularmente en la educación superior (ANUIES, 2004). En este sentido, las matemáticas se han asumido como un “lenguaje universal”, que constituye uno de los elementos más importantes para la alfabetización digital capaz de potenciar el manejo de la tecnología, de ahí la necesidad del dominio y aplicación de una matemática mínima esencial por parte de todos los ciudadanos (Orozco, 2008).

Sin embargo, con respecto al lenguaje matemático se presentan serios problemas, ya que los “lenguajes matemáticos” que utilizan los docentes y los estudiantes no necesariamente son los mismos (Tall, 1990). El lenguaje matemático es generalmente aprendido en la escuela por imposición. A su vez, es visto como un sistema codificado y acabado que se da de manera planificada y escalonada que se enseña y transmite a través de contenidos parciales, distintos conceptos, procedimientos y algoritmos cada vez más abstractos y alejados de la expresión física, lo que lo convierte en un objeto de conocimiento en sí mismo (Alcalá, 2002). Por lo anterior, no siempre logra constituirse en un medio de comunicación efectiva entre las personas, salvo aquellas que lo conozcan y manejen con propiedad; lo que puede implicar que mientras el docente utiliza un lenguaje técnico los educandos pueden interpretarlo coloquialmente o viceversa, lo que dificulta y,

en ocasiones, imposibilita una sola interpretación (García, 2012).

Estas visiones de las matemáticas, como potenciadora de competencias por un lado y como un lenguaje por otro, son particularmente importantes a nivel universitario, y de manera muy específica en las carreras relacionadas con las Ingenierías y las Ciencias Económicas. En estas carreras, el aprendizaje de las matemáticas es vital (Cantoral, 2002), por el impacto que tienen en términos de solución de problemas y capacidad de comunicación de resultados. Sin embargo, se debe reconocer que el aprendizaje de las matemáticas constituye uno de los problemas más significativos en todos los niveles de los sistemas educativos, incluido el superior. En el caso de Costa Rica, esto se muestra en el Examen de Diagnóstico aplicado desde 2006 por la Escuela de Matemáticas de la Universidad de Costa Rica a los estudiantes de nuevo ingreso (Escuela de Matemática, UCR, 2012).

Para Camarena (2010a), no hay duda de lo anterior e incluso afirma que el alto índice de reprobación en los cursos universitarios es una muestra del poco interés que muchos estudiantes manifiestan por las matemáticas debido a su “desconexión” con “su” realidad y “su” entorno, así como por la desarticulación que existe con los otros cursos de las carreras que cursan. Esto lleva a un conflicto permanente que contribuye a propiciar la sensación de que el aprendizaje de las matemáticas es un fin en sí mismo, contradiciendo el planteamiento de verlas como un lenguaje dentro de la sociedad del conocimiento y como un instrumento para muchas áreas científicas y profesionales ligadas al desarrollo de competencias.

Estudios realizados en muchos países indican que los problemas con el aprendizaje de las matemáticas no son de orden local o regional, sino de orden mundial (Tall, 1992; Artigue, 2000 y Camarena, 2010a). Tales problemas han sido estudiados tanto cuantitativa como cualitativamente de manera muy detallada en las últimas tres décadas, pero es evidentemente que aún se está lejos de poder resolverlos, lo que ha propiciado la generación de una nueva disciplina del conocimiento denominada “Educación Matemática”, la cual va más allá de ser un simple un cruce entre la pedagogía y las matemáticas.

A partir de esta nueva disciplina, las investigaciones desarrolladas parten de la expectativa de que es posible enfrentar los problemas del aprendizaje de las matemáticas si se toma en cuenta que dicho aprendizaje está afectado por múltiples variables. Estas son tanto de orden psicológico (que incluye aspectos cognitivos y emocionales), como epistemológicos (que se debate sobre lo que es hacer matemática), curriculares (qué es lo que se debe aprender y cuándo) y didácticos (cómo se deben enseñar y para qué) (Cordero, 2005).

Dado que nadie discute sobre la importancia del aprendizaje de las matemáticas (ya que se asume su utilidad y necesidad de manera clara y distinta), esta se ubica en una posición privilegiada frente a otras disciplinas del conocimiento humano. Aun así, es usual que mucha gente se pregunte sobre qué aspectos de las matemáticas son los que deben ser aprendidos por todos los miembros de la sociedad y, en el caso particular, por los estudiantes universitarios que estudian carreras ligadas a la Ingeniería (Camarena, 2010b).

Estas preguntas generalmente se centran en los contenidos definidos en los currículos escolares del sistema educativo (Pulido, 1998), que no necesariamente se corresponden con la

esencia de lo que es hacer matemáticas y mucho menos con los objetivos de disciplinas como las ingenierías. Esto hace de su aprendizaje un problema complejo que involucra, aparte del aprendizaje de conocimientos propios de matemáticas, variables como la motivación, la afectividad, la imaginación, la comunicación, los aspectos lingüísticos y la capacidad de representación (Cantoral, 2002).

Una de las causas más significativas que dificultan el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes se encuentra en que la enseñanza de la disciplina se ha venido realizando, desde hace mucho tiempo, desde una perspectiva “axiomatizada”, algorítmica y rutinaria. Esto lleva a considerar a las matemáticas como un conjunto de reglas y fórmulas que existen y valen por sí mismas, incluso ajenas a la cotidianidad y al entorno de los sujetos, ya sean estos educandos o educadores (Cordero, 2005; Moreno, 2005).

Lo anterior se ve agravado por un modelo educativo que demanda del educando la repetición de esquemas de pensamiento producto de una algebrización de conceptos, esto hace del álgebra el centro de gravedad de los conocimientos matemáticos y llega incluso a la aritmetización de esta, al reducir el álgebra al uso de valores por medio de la sustitución de expresiones algebraicas por numéricas (García, 2009; Artigue, 1995). Esto propugna un aprendizaje por repetición de ejercicios similares o iguales a los utilizados en clase (Moreno, 2005) o en un texto, lo que lleva entre otros aspectos a una pérdida de la imaginación, incapacidad de traslación de lo semántico a lo gráfico (o representacional) y viceversa, e incapacidad para relacionar los conceptos con el entorno y la cotidianidad (Tall, 1992).

Aunque pareciera evidente que el aprendizaje de las matemáticas se debería basar en una construcción donde las ideas simples anteceden a las más complicadas (Tall, 1990), resulta que en aprendizaje del cálculo, debido a las debilidades generadas por la algebrización de las matemáticas descrita, entre otros, por Artigue (1995), Cantoral (2002) y Camarena (2010), se dificulta establecer qué se debe considerar como conceptos más simples ya que para la mayoría de los estudiantes todos, o casi todos los conceptos, resultan difíciles.

Enfoques con respecto a la enseñanza de las matemáticas (cálculo)

En los últimos cincuenta años, la enseñanza del cálculo se ha desarrollado en un escenario singular y contradictorio, marcado por reformas y contrarreformas. Baste recordar que a finales de los años 50 del siglo XX se gestó en Europa una reforma que abogaba por unas matemáticas desde un punto de vista totalmente deductivo (dejando de lado el carácter intuitivo y su capacidad para resolver problemas), por ende abstracto. De esta manera, la enseñanza de la disciplina se basaba en una: “introducción de la teoría de conjuntos, simbolismo moderno, erradicación de la geometría euclidiana, introducción de las estructuras algebraicas y de sistemas axiomatizados, algebrización de la trigonometría, etc., etc.” (Ruiz, 1995, pp.152-153).

Tal reforma se concentró más en el manejo de definiciones, teoremas, lemas y postulados y su fundamentación lógica que en la resolución de problemas, lo cual refleja un alto nivel

de formalización y axiomatización, que favorece un trato homogenizado con respecto a los contenidos curriculares independiente del nivel escolar y, en el caso universitario, posibilita un manejo masificado de estudiantes. Esto llevó a que muchos docentes llegaran a considerar que el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas constituyen un fin en sí mismas, lo cual impactó a otras disciplinas de manera negativa y evidenció poca claridad sobre el papel que las matemáticas juegan en aquellas disciplinas para las cuales aportan sus conocimientos.

La reforma indicada generó una especie de callejón sin salida que fue duramente criticada por Morris Kleine a mediados de los años 70 en su libro *El fracaso de las Matemáticas Modernas: ¿Por qué Juanito no puede sumar?* En este cuestionó la significatividad del aprendizaje formal de las matemáticas por el perfil que este tipo de enseñanza de las matemáticas tomaría, lo cual favoreció que la gente asumiera al álgebra como el centro de gravedad de las matemáticas y a la aritmética como la simplificación del álgebra, apoyándose en el uso de calculadoras científicas (García, 2009).

En el caso del cálculo, investigaciones realizadas por Artigue (1995, citado por Salinas y Alanís, 2009) dejaron evidencias de que las matemáticas en general -y particularmente el cálculo- se han enseñado desde una perspectiva mecanicista, reduciendo su aprendizaje a prácticas algorítmicas y algebraicas (Idris, 2009), donde los estudiantes privilegian la obtención de una respuesta (ojalá la correcta), por encima del proceso que lleva a esta, aspecto que caracteriza al aprendizaje sin comprensión (García, 2009).

Artigue (2000) indica que muchas de las investigaciones en educación matemática relativas al tema coinciden en que no es fácil para los estudiantes insertarse en el campo del Análisis Matemático (como el cálculo), ya que este no se puede reducir a una versión puramente algebraica. Además, que el cálculo se reduzca al álgebra puede ser considerado como un mal menor si se toma en cuenta que el aprendizaje del álgebra ya de por sí enfrenta serios problemas (Miller, 2007), por lo que en muchos casos ni siquiera se puede esperar un manejo instrumental y algorítmico del cálculo.

Si bien el álgebra constituye la base para el lenguaje matemático, debe tenerse en cuenta que es diferente al cálculo. Cada uno de estos campos de las matemáticas posee sus propias reglas y características, de manera tal que lo que es verdad en uno no significa que en el otro deba asumirse de igual manera. Al considerarse al cálculo como una extensión del álgebra, se potencia un aprendizaje sin comprensión, débil, pasajero contradictorio, descontextualizado, formal, superficial y libresco.

El enfoque heredado de la reforma en la enseñanza de las matemáticas, que ha llevado a la algebrización y posteriormente a la aritmetización del cálculo, va en contra de la naturaleza histórica del surgimiento de dicha rama de las matemáticas, el cual ha mostrado estar ligado a la resolución empírica de problemas concretos y específicos, donde antes de crearse la estructura deductiva se había trabajado con conceptos, temas y aplicaciones de manera intuitiva, con argumentos físicos, dibujos y generalizaciones (González y Waldegg, 1995). Este aspecto ha quedado más que demostrado por la historia de la humanidad, dado que la formalización y abstracción han aparecido siempre después de la creación y la experimentación.

En razón de esta contradicción, a finales de los años 90 del siglo pasado se comenzó a gestar una contrarreforma encabezada por Artigue (1995) y secundada en la primera década del siglo XXI por Zúñiga (2007) y Camarena (2010 b), entre otros, en procura de un aprendizaje basado en problemas reales como vía para la contextualización de las matemáticas. Una muestra de esto es el esfuerzo denominado “Matemáticas en el contexto de las Ciencias”.

De esta manera, es posible considerar que en las últimas tres décadas, el aprendizaje y enseñanza del cálculo se ha movido entre tres grandes propuestas epistemológicas y didácticas.

Un primer planteamiento, heredero de la reforma de mediados del siglo XX, caracterizada por un manejo abstracto de las matemáticas basado en el formalismo del pensamiento lógico-aristotélico, descontextualizado y ajeno a la realidad cotidiana que incluía un análisis riguroso ligado a definiciones y teoremas y sus demostraciones. Esto convirtió al aprendizaje de las matemáticas en un manejo mecánico caracterizado por el uso (y abuso) de fórmulas y reglas sin comprensión por parte del educando (e incluso muchos docentes) lo que posibilitó la algebrización (e incluso la aritmetización), y conllevó la supresión de la individualidad, al encerrar al educando en un formalismo incapaz de contribuir con el desarrollo de competencias por actuar como una camisa de fuerza que inhibía o dificultaba el surgimiento de la imaginación y la creatividad, al chocar con la cotidianidad del individuo.

Como respuesta a lo anterior, se apeló a un modelo más pragmático, caracterizado por un aprendizaje no formal ligado a reglas y mecanismos capaces de permitir obtener la solución de ejercicios desde un texto (Tall, 1992). Esto redujo a las matemáticas a la obtención de la respuesta correcta a cualquiera de los ejercicios que se encuentran en los textos o son propuestos en las evaluaciones, lo que implicó que los objetivos de los planes de estudio de los programas de los cursos de matemáticas quedaran aislados y desvinculados unos de los otros. En el caso de los estudios universitarios, se pretendió además que los estudiantes llegasen a ser capaces de articularlos como un todo, para poder modelar eventos de su futura actividad profesional (Camarena y Benítez, 2009), lo que significa lograr desarrollar la competencia de transferir el conocimiento matemático que se ha aprendido, separado de todo contexto real, hacia la práctica cotidiana y especialmente la profesional.

Una tercera propuesta ha planteado la importancia y necesidad de centrar el proceso de aprendizaje-enseñanza en un nuevo modelo a partir de la reflexión de la realidad, volcándose sobre la misma, donde las matemáticas constituyan un conjunto de instrumentos intelectuales y cognitivos capaces de posibilitar la búsqueda de soluciones a los problemas que la Humanidad enfrenta con respecto a la explotación y utilización de los recursos naturales, tal y como lo proponen Zúñiga (2007) y Camarena (2010), procurando así el desarrollo de competencias (Delors, 1997; Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, 2006). La razón de esto está en considerar a las matemáticas, incluyendo el cálculo, en tanto construcción humana, como un instrumento intelectual creado por la humanidad para resolver problemas en términos de la relación hombre-naturaleza en su vida cotidiana.

Lo anterior responde a que el cálculo constituye una de las herramientas intelectuales más poderosas y útiles con que cuenta la humanidad, cuyos orígenes se remontan a Arquímedes (S. III a.C.) y sus esfuerzos por lograr el cálculo de áreas y volúmenes. No fue sino hasta casi 2000 años después, en el siglo XVII, gracias a Descartes y Fermat, que esta área fue retomada con el fin de poder resolver muchos problemas que intrigaban a los matemáticos, como el cálculo de rectas tangentes a una curva, volúmenes, determinar la existencia de máximos y mínimos así como centros de gravedad, etc., dentro de los que destacaron Newton y Leibniz, pero fueron otros quienes se encargaron de su formalización con el paso del tiempo, como Euler, Gauss, Cauchy, Riemann, etc.

Por lo anterior, no es una tarea fácil el justificar la presencia y didáctica de determinados contenidos matemáticos en los cursos de servicio, particularmente en las áreas de Ingeniería y Ciencias Económicas (Espinoza, 2008), de manera tal que es posible poner en duda si el saber matemático que se pretende que los estudiantes aprendan y aprehendan en sus carreras universitarias es realmente válido, significativo e importante.

Dificultades en el aprendizaje del cálculo en los cursos de Ingeniería

Como se indicó anteriormente, en las carreras de Ingeniería y Ciencias Económicas, las matemáticas se proponen y asumen como uno de los elementos fundamentales para su desarrollo. Particularmente, en el caso de las Ingenierías, se parte de la idea de que las matemáticas constituyen la base intelectual sobre la cual se edifica la disciplina. Debe considerarse la Ingeniería, independiente de su área de especialidad como:

La profesión en la que los conocimientos de matemáticas y ciencias naturales, obtenidos a través del estudio, la experimentación y la práctica, se aplican con juicio, para desarrollar diversas formas de utilizar, de una manera económica, las fuerzas y materiales de la naturaleza en beneficio de la humanidad. (Melo, 2003, p. 54)

Por su parte, Chatterjee (2005) considera que la Ingeniería se desarrolla en función de mejorar las condiciones de la vida humana por medio del uso deliberado de las leyes de la naturaleza para poder explotar sus recursos de forma óptima, lo que implica que su interés está más en lograr aplicaciones prácticas (es decir, en resolver problemas), donde para lograr esto hace uso de las matemáticas y particularmente del cálculo.

Por su parte, Camarena (2010 b) plantea que en el aprendizaje y enseñanza de la Ingeniería intervienen muchos factores, dentro de los que destacan los referidos a las ciencias básicas. Estos constituyen las bases para las carreras de dicha disciplina y el aprendizaje de las matemáticas es el elemento más crítico, lo cual advierte que esto lleva a una situación de debilidad en la formación de los futuros ingenieros, ya que un aprendizaje de las matemáticas en general, y del cálculo en particular, de manera indebida o incorrecta, puede dificultar el desarrollo profesional del futuro ingeniero.

Al reflexionar sobre cómo conceptualizar qué es Ingeniería con base en las propuestas de Melo y Charttejee, y ligar esto a la propuesta de Guevara (2007) respecto a qué se puede entender por hacer matemáticas, es posible apreciar que existe una gran coincidencia, particularmente en el implícito que demanda del educando el relacionar el ingenio con la abstracción y el análisis, lo que está ligado a la imaginación y la reflexión, elementos básicos para el futuro Ingeniero.

Lo anterior implica que la Ingeniería demanda de los educandos el desarrollo de su capacidad reflexiva con relación a los problemas que le presenta el entorno, donde las matemáticas constituyen un instrumento para la búsqueda de soluciones o respuestas a los mismos, por lo que su enseñanza y aprendizaje no deben ser tomados a la ligera. Esto sugiere que el fracaso del aprendizaje del cálculo por parte de los estudiantes podría estar relacionado con un manejo no adecuado de las matemáticas debido a un desconocimiento de cómo aprovechar los recursos que ofrece el álgebra, las propiedades de los números, las ecuaciones e inecuaciones, la geometría y especialmente las funciones.

Incluso Vrancken, Gregorini, Engler, Mullery Hecklein (2006) aseguran que es posible que los alumnos puedan tener conocimientos en todos los aspectos anteriores y aun así fracasar al estudiar cálculo, lo que significaría que el problema no está en la adquisición (o falta de) conocimientos, ya que estos pueden volverse inertes frente a la significatividad que deberían tener con respecto a su formación profesional, sino al hecho de que la educación basada en el álgebra que reciben los educandos antes de llegar, o al llevar los cursos de cálculo, no está relacionada con la realidad o el entorno, así como con las necesidades propias de la Ingeniería. Esto obliga a muchos de los estudiantes a tener que aprender por sí mismos las diferencias entre el álgebra y el cálculo, es decir, tratar de comprender qué tanto del álgebra les es útil con respecto a los conceptos requeridos por el cálculo, aspecto que es sumamente difícil de lograr en las circunstancias en que llegan a la universidad (Miller, 2007).

Por otra parte, independientemente del enfoque epistemológico y didáctico que asuma el docente en cálculo, su percepción del qué y para qué de las matemáticas, será irremediamente trasladada a los educandos; es decir, el aprendizaje del cálculo está afectado por la manera en cómo se da su enseñanza, la cual puede estar lejos de lograr que los estudiantes alcancen la comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento que demanda esta parte de las matemáticas (Moreno, 2005).

Según Bayazit (2010), hay suficientes evidencias de que las prácticas de la enseñanza están determinadas por el enfoque que sigue el docente con respecto a cómo percibe, manipula y transmite los conceptos matemáticos. Esto lleva a que el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes difiera en términos cualitativos de unos a otros, de un docente a otro, de un curso a otro, e incluso de una carrera a otra.

De esta manera, se puede afirmar que el problema del aprendizaje del cálculo para Ingeniería está ligado con la enseñanza del mismo (Idris, 2009), enseñanza que muchas veces propugna por un aprendizaje mecánico y memorístico basado en la obtención de una

respuesta final y preferentemente correcta en contraposición a un aprendizaje que privilegia el proceso, el contexto y la comprensión de manera coherente y clara.

Adicionalmente, para enfrentar el problema del aprendizaje de las matemáticas en general y del cálculo en particular, se han realizado esfuerzos que incluyen el uso de recursos tecnológicos (Mack, 1992, citado por Moreno, 2005) y el apelar a una introducción más intuitiva partiendo de la resolución de problemas concretos (Zúñiga, 2007), en procura de lograr integrar y coordinar los enfoques numérico, algebraico y gráfico, que posibiliten la adquisición de ideas y conceptos más significativos y profundos (Moreno, 2005). Esto debido a que reducir el cálculo a una serie de reglas, o métodos mecánicos, parece predisponer el funcionamiento cognitivo de los estudiantes, lo que afecta su motivación e interés, e interfiere en su formación profesional y en el futuro desempeño laboral (Zúñiga, 2007).

Conclusiones

El fracaso por parte de muchos estudiantes en los cursos de matemática introductoria a nivel universitario y particularmente de cálculo se puede considerar relacionado con el abordaje que los docentes han hecho al respecto, particularmente en la secundaria, de los tópicos de álgebra, ya que los estudiantes que ingresan a las universidades han pasado previamente por niveles educativos que han incidido en su forma de cómo ver, aproximarse y trabajar en matemáticas (Artigue, 2000; Miller, 2007 y Tall, 1992).

No se debe, por tanto, de manera simplista y exclusiva, acusar a los estudiantes como los únicos o principales responsables de no contar con los conocimientos previos o de ser incapaces de comprender el manejo de los conceptos en cálculo. En todo caso, ellos son producto de un proceso que algebrizó el cálculo y aritmetizó el álgebra donde, por transitividad, el cálculo ha terminado siendo una extensión de la aritmética.

Es posible considerar que los temas de cálculo desarrollados por especialistas en matemáticas, pero con escasa o nula formación en Ingeniería, podrían tener un impacto diferente a que si los mismos fuesen desarrollados por especialistas en matemáticas que tengan una formación en Ingeniería, o al menos logren interpretar este campo del conocimiento humano, de manera tal que sean capaces de apreciar a las matemáticas como un instrumento que contribuye a resolver problemas planteados en dicho campo. A esto debe agregarse la necesidad e importancia de que el docente de cálculo posea conocimientos en docencia universitaria, porque el hecho de ser especialista en un área del conocimiento (matemáticas o Ingeniería) no garantiza que el docente sea capaz de lograr transmitir sus conocimientos o que los educandos logren construirlo.

En el caso de tener especialistas en matemática con poca o nula formación en Ingeniería en calidad de docentes de cálculo, se corre el riesgo de descontextualizar la razón de ser del cálculo en términos de las necesidades de la Ingeniería. En tanto en el caso contrario, se podrían abrir espacios a la propuesta de Camarena (2010 a y b) sobre la existencia de una Ingeniería Matemática que enfilaría el aprendizaje y,

consecuentemente, la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva específica propia de la Ingeniería, aportándole los instrumentos intelectuales y cognitivos necesarios que contribuyan a que las matemáticas cumplan de la mejor manera posible con las funciones que le han sido asignadas como área especializada del conocimiento humano.

Se deduce que tanto el aprendizaje como la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario se desenvuelven en distintos planos que se contraponen e incluso se contradicen, ya que, mientras uno plantea un mundo ideal que incorpora la formación integral del educando, promoviendo formalmente la generación de competencias, los otros plantean un aprendizaje teórico, axiomático, descontextualizado y sin significatividad.

Por otra parte, un aprendizaje de las matemáticas –y por ende del cálculo– visto como una extensión del álgebra, la cual a su vez es considerada como una extensión de la aritmética, ligada generalmente a un uso indiscriminado de las calculadoras, posibilita que el cálculo termine siendo visto como el resultado de una correcta manipulación de fórmulas, en un marco de descontextualización de las matemáticas, contradiciendo el quehacer mismo del cálculo.

La algebrización del cálculo y la aritmetización del álgebra han perdido de vista el origen del cálculo y su papel en la Ingeniería, dejando de lado la importancia que para esta tiene el carácter representacional y semántico de las matemáticas, y su impacto en el quehacer de los ingenieros para la formulación de posibles explicaciones o manejos de los fenómenos que enfrentan.

Las dificultades de orden semántico y representacional, derivadas de la algebrización y aritmetización del cálculo, en el caso de la Ingeniería, constituyen serias limitantes para el ejercicio profesional. Estos procesos potencian un aprendizaje sin comprensión, al centrar los esfuerzos de los educandos en la obtención de soluciones (como un fin en sí mismo) e ignorar los aspectos cognitivos y socio-afectivos, haciendo que el aprendizaje del cálculo no contribuya, o lo haga de una manera muy marginal, al desarrollo del educando que estudia Ingeniería

En una sociedad que tiende a la digitalización y está caracterizada por el crecimiento exponencial de la información gracias a las tecnologías de la información y la comunicación, el percibir el proceso de aprendizaje y enseñanza del cálculo desde la perspectiva algebrizada, reducida a la aritmética de las calculadoras, descontextualizada, formalizada por la abstracción de las matemáticas, debe cambiar, por lo que se hace necesaria una revalorización sobre el qué hacer y cómo hacer que esta disciplina pueda ser aprendida, para constituirse en el instrumento para el cual la humanidad lo creó: un mecanismo para resolver problemas del entorno reflexionando sobre él mismo, con el fin de poder optimizar los recursos, cada vez más escasos, con que se cuenta. Esto solo será posible cuando en la formulación curricular de los cursos de matemáticas para Ingeniería las necesidades de esta disciplina prevalezcan sobre los criterios de los matemáticos.

Referencias bibliográficas

- Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Grao.
- ANUIES. (2004). Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior ANUIES. *Documento estratégico para La Innovación en la Educación Superior*. México.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en la educación Matemática*. "Una empresa docente". México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Artigue, M. (2000). Teaching and Learning Calculus. What Can be Learned from Education Research and Curricular Changes in France. Incluido en *Research in Collegiate Mathematics Education. IV*, by Dubinsky et al. Recuperado de www.Research in Collegiate Mathematics Education. IV
- Bayazit, I. (2010). The Influence of Teaching on Student Learning: The Notion of Piecewise Function. *International Electronic Journal of Mathematics Education*. 5(3), 2010. Recuperado de www.iejme.com/
- Camarena, P. y Benítez, A. (2009). *La transferencia del conocimiento matemático*. I Foro Internacional en Innovación Educativa. Chapingo. Recuperado de portal.chapingo.mx/dga/planes/.../patricia_camarena_gallardo_mex_p_3.pdf
- Camarena, P. (2010a). *Aportaciones de investigación al aprendizaje y enseñanza de la matemática en ingeniería*. Recuperado de www.ai.org.mx/eventos/coloquios/ingreso/10/camarena.html
- Camarena, P. (2010b). *La modelación matemática en la formación del ingeniero*. Recuperado de [www.m2real.org/IMG/pdf Patricia Camarena Gallardo-II.pdf](http://www.m2real.org/IMG/pdf_Patricia_Camarena_Gallardo-II.pdf)
- Cantoral, R. (2002). Enseñanza de la matemática en la educación superior. *Revista Sinéctica*, 19. Recuperado de www.portal.iteso.mx/portal/page/portal/Sinectica/Historico/.../019
- Chatterjee, A. (2005). Mathematics in engineering. En *Current Science*. 88(3). Recuperado de www.ias.ac.in/currensci/feb102005/405.pdf
- Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista latinoamericana de investigación en matemática*, 8(3). Recuperado de www.clame.org.mx/relime.htm
- Delors, J. (1997). *La educación encierra un tesoro*. México: UNESCO.
- Escuela de Matemáticas de la Universidad de Costa Rica. (2012). Informes de proyecto Examen de Diagnóstico. Recuperado de <http://www.emate.ucr.ac.cr/>

- Espinoza, D. (2008). La formación matemática en la educación superior. *El Hombre y la Máquina*, 31, 52-63. Universidad Autónoma de Occidente. Cali, Colombia. Recuperado de <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=47803105>
- Frade, L. (2009). *Desarrollo de competencias en educación: desde preescolar hasta el bachillerato*. México: Inteligencia Educativa.
- García, J. (2009). La calculadora científica y la obtención de la respuesta correcta. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 9(2), 1-19. Recuperado de revista.inie.ucr.ac.cr/.../la-calculadora-cientifica-y-la-obtencion-de-la-...
- García, J. (2012). El lenguaje y las dificultades para el aprendizaje de las matemáticas. *Diálogos Pedagógicos*. 10(19).
- González, M. y Waldegg, G. (1995). Lectura 3: *El fracaso de la matemática moderna. La Matemática, su enseñanza y aprendizaje*. Thais Castillo y Virginia Espeleta. (Comp.). San José, Costa Rica: EUNED.
- Gómez, C. (1991). Cognición, contexto y enseñanza de las matemáticas. *CL & E. Comunicación, Lenguaje y Educación*. 11-12, 11-26. Recuperado de dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=126226
- Guevara, R. (2007). *La matemática y la actividad humana. Encuentros con Pascal*. San José, Costa Rica. EUNED.
- Idris, N. (2009). Enhancing students' understanding in calculus through writing. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(1). Recuperado de www.iejme.com/012009/d3.pdf
- Melo, M. (2003). Las matemáticas en la ingeniería a través de la historia. *Revista Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, 13. Recuperado de www.redalyc.uaemex.mx/pdf/911/91101306.pdf
- Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de Estudio en Matemáticas*. San José, Costa Rica.
- Miller, D. (2007). Helping Students Understand Technical Calculus via on Online Learning Supplement and Group Learning. Proceedings of the Mathematics Education into the 21st Century Project. *9th Annual International Conference in Math Education - Mathematics Education in a Global Community*, 9, 431-436. Recuperado de math.wvu.edu/~millerd/
- Moreno, María. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En Maz, A., Gómez, B. y Torralbo, M. (Coords.). *Noveno Simposio*

de la Sociedad Española en Educación Matemática SEIEM, 81-96). Universidad de Córdoba, Córdoba, España. Recuperado de www.dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=2728867&orden=0

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. (2006). La definición y selección de competencias clave. Resumen Ejecutivo. Organización para el Desarrollo y la Cooperación Económica. Recuperado de www.deseco.admin.ch/bfs/.../2005_dsceexecutivesummary.sp.pdf

Orozco, C. (2008). Interacción digital alumno – profesor. El correo electrónico y su atribución en el desarrollo del desempeño matemático universitario. *FOCUS VII, Vol 1* (2008). Recuperado de focus.bayamon.inter.edu/a7_n1/corozco.pdf.

Pulido, R. (1998). El rediseño de los cursos de cálculo. *Revista Transferencia. Año 11, N.º 44*. Recuperado de www.mty.itesm.mx/.../transferencia/Transferencia44/cont44.htm

Rigo, M.; Páez, D. y Gómez, B. (2009). Procesos Meta-Cognitivos en las clases de matemática elemental. Propuesta de un marco interpretativo. Recuperado de www.seiem.es/publicaciones/.../SEIEMXIII-RigoAlfonsoGomez.pdf

Ruiz, Angel. (1995) *Historia de las Matemáticas en Costa Rica. Una introducción*. San José: Editorial UCR.

Salinas, Patricia. y Alanís, Juan. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 12(3)* Recuperado de www.clame.org.mx/relime.htm

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the learning of Calculus and Analysis. Recuperado de www.warwick.ac.uk/staff/David.../dot1990b-inconsist-focus.pdf

Tall, D. (1992). *Students' Difficulties in Calculus*. Plenary presentation in Working Group 3, ICME. Québec. Canada. Recuperado de www.warwick.ac.uk/staff/...Tall/.../dot1993k-calculus-wg3-icme.pdf

Vrancken, S.; Gregorini, M.; Engler, A.; Muller, D.; Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA. Sociedad Argentina de educación Matemática (SOAREM). Año 8, N.º 29, 9-19*. Recuperado de www.soarem.org.ar

Zúñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Marzo, 10(1)*. Recuperado de www.clame.org.mx/relime/20070107.pdf