

MÉTODO PREDICTIVO DE VOLATILIDAD TIPO CAMBIO

Jeffrey Viales Abellán¹

ÍNDICE

Resumen	403
Abstract	403
1. Introducción	404
2. Etapas y antecedentes de volatilidad en el mercado cambiario costarricense	404
3. Revisión de metodologías de valoración de riesgo.....	406
3.1 Metodología Delta-Normal	406
3.2 Metodología Simulación Histórica	408
3.3 Metodología Simulación Monte Carlo	409
4 Modelo Arma(p,q)-Garch(p,q) y análisis de resultados.	412
4.1. Planteamiento teórico del modelo.....	412
4.2. Análisis estadísticos de los rendimientos del tipo de cambio	414
4.3 Estimación del modelo Ar(p)-Garch(p,q)	417
5. Conclusiones.	420
6. Referencias Bibliográficas	420

RESUMEN

Las series temporales descritas por precios de ciertos activos financieros tales como el de las acciones y divisas presentan dos principales características, excesos de kurtosis y *clustering* de volatilidad. Para recoger estas características se han utilizado modelos no lineales tales como los modelos Garch o Volatilidad Condicionada y los modelos de Volatilidad Estocástica, ambos tipos de modelo son empleados para la gestión del riesgo cambiario a corto plazo; el primer tipo de modelos definen la volatilidad en función de la misma volatilidad rezagada y de los *shocks* (innovaciones de volatilidad); el segundo tipo de modelos son similares a los modelos Garch con la variante de que la volatilidad incluye por si misma un término aleatorio $\{h(t), t \geq 0\}$ de tipo proceso Wiener²; estos modelos son empleados para simular caminatas aleatorias del tipo de cambio con volatilidades simuladas por las ecuación estocásticas de volatilidad.

1 Bachiller en Ciencias Actuariales UCR y Analista de la Gerencia de Riesgos Financieros Banco de Costa Rica. Actualmente cursa Maestría Profesional en Matemática Aplicada, SIMPA, UCR; profesor Escuela de Matemáticas, UCR feffviales@bancobcr.com

2 Es un proceso probabilístico en tiempo continuo que se caracteriza por que:

1. Los valores generados por el proceso son distribuidos como una normal estándar.
2. Es un proceso sin memoria; es decir, los valores futuros generados dependen únicamente de su valor actual, no así de valores pasados.
3. $E[h(t)] = 0$ y $E[h(t)h(s)] = s - t$ para cualquier $s \geq t$, es decir; las variaciones generadas por este proceso son independientes del tiempo.

En el presente trabajo se analizará el desempeño del modelo Garch en comparación a las medidas de volatilidad utilizadas actualmente para la gestión del riesgo cambiario; sus implicaciones para la gestión de riesgos.

PALABRAS CLAVE: KURTOSIS, VOLATILIDAD, RIESGO CAMBIARIO

ABSTRACT

The time series, used to describe the stock prices and Exchange rate, have two characteristics: kurtosis and volatility. Actually, there are models that study kurtosis and volatility such as non lineal models: Garch models, conditional volatility and stochastic volatility models. These models are used in market risk for the forecasting of the exchange rate in the short term.

The first models (Garch and conditional volatility) define volatility with its volatility from the past periods and volatility financial shocks. The second models are like Garch models but use a stochastic process known as *Wiener*. This process uses simulating random walks of the exchange rate with simulating volatilities by stochastic equations.

In this paper, we will analyze the performance of Garch models versus the actual models used to give forecast of the exchange rate.

KEY WORDS: KURTOSIS, VOLATILITY, MARKET RISK

1. INTRODUCCIÓN

En los mercados cambiarios ha sido muy importante modelar la volatilidad de las variaciones del tipo de cambio, mas no así dar una estimación puntual del mismo; es por esto que se realiza mediciones de cuanto se desvían del pronóstico del tipo de cambio esperado en un horizonte de tiempo t .

Es por lo anterior, que en el presente trabajo se hará una revisión de las metodologías VaR empleadas que estiman el requerimiento de capital por riesgo cambiario utilizando *backtesting*; dados estos resultados se aplica y se analiza el desempeño de metodologías de medición de volatilidad (riesgo) más robustas que las actuales; metodologías tales como los que ofrecen los modelos Arma, Garch y Volatilidad Estocástica; modelos que puedan ser usados para la predicción y persistencia de volatilidad en el tiempo del tipo de cambio; hacer estimaciones más confiable del valor en riesgo y para la valoración de derivados cambiarios, tales como los *forward*, opciones, entre otros.

El presente documento se estructura con una primera parte que recapitula los cambios que ha tenido el mercado cambiario y los antecedentes de volatilidad observados, posteriormente

la segunda parte de este trabajo se revisarán las metodologías de valoración de riesgos empleadas, en una tercera parte se hará el planteamiento teórico-práctico de los modelo Garch así como también del análisis de los resultados obtenidos, se analizarán las características estadísticas del tipo de cambio colón-dólar Principalmente la estacionariedad y normalidad; y por último se resume las principales conclusiones del trabajo que busca fomentar la aplicación de nuevas metodologías de estimación de pérdidas esperadas por volatilidad del tipo de cambio.

2. ETAPAS Y ANTECEDENTES DE VOLATILIDAD EN EL MERCADO CAMBIARIO COSTARRICENSE

El mercado cambiario en Costa Rica según Alberto Trejos³ se distingue por tener tres etapas muy bien marcadas; la primera de ellas corresponde al periodo comprendido entre 1984-2006 en la que el mercado cambiario fue administrado por el Banco Central de Costa Rica utilizando el esquema de las mini devaluaciones, esquema que le permitió al BCCR tener

³ Trejos Alberto. Pronóstico Económico Cefsa, Mercado Cambiario.2010

control y estabilidad del tipo de cambio teniendo como costo de oportunidad un limitado control sobre la inflación.

Posteriormente la segunda etapa del mercado cambiario está marcada entre el periodo octubre-2006 y agosto 2009, cuando el BCCR decide cambiar el esquema cambiario de las mini devaluaciones a un esquema de bandas cambiarias con el objetivo de tener un mayor control sobre la oferta de dinero, controlar la inflación; y subsecuentemente administrar de mejor manera otros riesgos, tales como el riesgo de tasas de interés, riesgo inflacionario y el manejo de las pérdidas del BCCR. Este periodo se caracterizó por la intervención del BCCR que tranquiliza los episodios de alta volatilidad en el corto plazo, episodios que no son explicados por los cambios en los fundamentales sino según Alberto Trejos por expectativas de los inversionistas; estos episodios de volatilidad se caracterizan por ser periodos de calma en volatilidad seguidos por saltos de volatilidad fuera de lo normal, el primero de estos periodos de baja volatilidad lo comprende desde el momento que se establecen las bandas hasta mayo-2008, en este periodo los inversionistas de corto plazo especulan con la apreciación del tipo de cambio hasta que en mayo-2008 las expectativas de estos participantes revierten expectativas a la apreciación a una depreciación, y el tipo de cambio salta de los 492 hasta los 521 colones por dólar; el segundo episodio de volatilidad se da en julio-2008 cuando el tipo de cambio vuelve a dar otro salto pasando de los 520 a los 555 colones por dólar. Dado estos dos episodios de volatilidad el BCCR interviene tranquilizando la volatilidad del tipo de cambio, y decide reducir el *spread* de la banda cambiaria, a partir de julio-2008 el tipo de cambio se pega al techo de la banda cambiaria presentando ciertas fluctuaciones a finales del 2008 pero con tendencia a la depreciación; comportamiento que se marcó aún más cuando en febrero 2009 el BCCR decide aumentar la pendiente del techo de la banda depreciándola de 0.06 colones por dólar a 0.20 colones por dólar, el colón continua depreciándose hasta que a finales de agosto-2009, el tipo de cambio se despega del techo de la banda y empieza a fluctuar dentro de la misma; en términos gene-

rales este periodo se caracteriza por tener un tipo de cambio que está determinado por aspectos especulativos de unos pocos participantes en el mercado y no tanto del cambio que puedan haberse dado en los fundamentales.

La tercer y penúltima etapa del mercado cambiario para alcanzar el esquema de flotación libre del tipo de cambio, es el esquema de flotación “sucia” en la que el precio de la divisa está determinado por la demanda y oferta, así como también por la intervención intrabanda que tenga el BCCR con el propósito de bajar episodios de alta volatilidad, sin determinar la ruta de los niveles del tipo de cambio o un nivel meta para la tasa de cambio; el comienzo de esta tercera etapa se dio en agosto-2009 cuando el BCCR logra darle mayor volatilidad al tipo de cambio, volatilidad que responde a la presencia de más participantes en el mercado y que está determinada en gran medida según Luis Mesalles3 “*más por los flujos externos e internos de capital que por la parte real de la economía (exportaciones-importaciones e inversión extranjera directa)*”⁴. La figura 1 muestra las etapas que se identifican en la evolución del tipo de cambio.

Dado las etapas y los ajustes que ha sufrido el mercado cambiario; el BCCR logra darle volatilidad “normal” al mercado cambiario, donde entiéndase “normal” a que los niveles de volatilidad del tipo de cambio colón-dólar son similares a las volatilidades de los tipos de cambios registrados en países como Chile, Colombia, Perú y México con valores en promedio del 2% diarios; por lo que el tema de la volatilidad es algo por lo que toma relevancia en la gestión de riesgos; máxime más aún cuando el nuevo jerarca del Banco Central tendría como meta pasar al esquema de flotación administrada, la última etapa antes de emigrar a un esquema de libre flotación, que le permite al BCCR por medio de tasas de interés tener control sobre la liquidez en la economía, la oferta de dinero; y con esto establecer en definitiva un sistema macroeconómico de metas de inflación o *inflation targeting*.

4 Mesalles Luis. Análisis de los factores explicativos y tendencias del mercado de Monex, Ecoanálisis, Marzo-2010.

FIGURA 1
ETAPAS DEL TIPO DE CAMBIO ENERO-2006 A AGOSTO-2010



Fuente: Elaboración propia.

3. REVISIÓN DE METODOLOGÍAS DE VALORACIÓN DE RIESGO

Actualmente el seguimiento del riesgo cambiario se realiza sobre el impacto que tiene las variaciones del tipo de cambio colón-dólar sobre la posición neta abierta patrimonial en dólares; este impacto es medido utilizando tres metodologías de valor en riesgo; estas metodologías estiman a un nivel de confianza dado para un horizonte de un día la máxima pérdida esperada por movimientos adversos del tipo de cambio, entendiéndose como pérdida a la desvalorización en términos de moneda base(colones) la posición neta patrimonial en dólares. Actualmente se utilizan las metodologías VaR Delta-Normal, Simulación Histórica y Simulación de Monte Carlo.

3.1 Metodología Delta-Normal

Esta metodología está sustentada en la hipótesis de que la serie de 252 datos observados de las variaciones logarítmicos diarios del tipo de cambio referencia de compra definidos como $R_t = \ln\left(\frac{TC_t}{TC_{t-1}}\right)$, se distribuyen con una

función de distribución de probabilidad normal con media μ_t y varianza σ_t^2 . El cálculo del valor en riesgo sobre la posición neta abierta se define como la multiplicación de la posición neta abierta en moneda extranjera con la desviación estándar y el percentil 1% de una función distribución de probabilidad normal estándar; por lo tanto el Valor en Riesgo por esta metodología se ha definió como

$$VaR_t = PNME * \sigma_t * q_{1\%} * TC_t \quad (1)$$

Donde:

- PNME:= Posición Neta en Moneda Extranjera definida como la brecha entre activos menos denominados en dólares.
- σ_t^2 es estima utilizando la varianza muestral $S_t = \frac{\sum_{k=1}^{255} (R_k - \bar{R})^2}{254}$, siendo \bar{R} promedio del tipo de cambio en el último año.
- $q_{1\%} = 2.33$, corresponde al percentil 1% de una función de distribución de normal estándar.
- TC_t , tipo de cambio de referencia de compra a la fecha de valoración del riesgo.

Por ejemplo supóngase que se tiene para agosto 2010 una posición neta abierta en dólares de \$95,391,031.61; las pérdidas según meto-

dología Delta-Normal pueden ascender hasta un monto de ¢697.6 millones de colones a un día al 99% de confianza. El cuadro 3.1.1 muestra la exposición a riesgo cambiario medido por esta metodología.

CUADRO 3.1.1.
VALOR EN RIESGO: METODOLOGÍA DELTA
NORMAL.

Riesgo Cambiario Delta Normal Al 31 Agosto 2010	
PNME	\$95,391,031.61
σ	0.62%
Percentil 1%	1.45%
VaR	¢697,619,179.34
Tipo Cambio Compra	504.12
Indice Riesgo Cambiario	1.45%

Fuente: Elaboración Propia.

Del cuadro 3.1.1 bajo la hipótesis de normalidad; los retornos observados en el periodo comprendido entre agosto-2009 a agosto-2010 presentaron una volatilidad de 0.623% con media estadísticamente igual 0; que al utilizar en la estimación el supuesto de normalidad, se tiene un percentil 1% igual a 1.45 %, por lo que el requerimiento de capital por riesgo cambiario (VaR) a un día sobre la posición neta es de ¢697,6 millones de colones.

Por otro lado, en la figura 3.1.2 se distinguen las diferencias entre la función de densidad empírica de los retornos con la función de densidad normal con media 0 y desviación estándar 0;622%, claramente en la figura se notan diferencias de sus estadísticas, en particular de los parámetro de *skewness*⁵ o coeficiente de asimetría

5 Skewness mide el sesgo que tenga la función de distribución de probabilidad.

y el parámetro de kurtosis⁶, parámetros que indican la existencia de sesgo y sobreestimación que pueda darse al estimar el VaR considerando como función de distribución de probabilidad una normal; en lugar de la función de probabilidad empírica de los retornos.

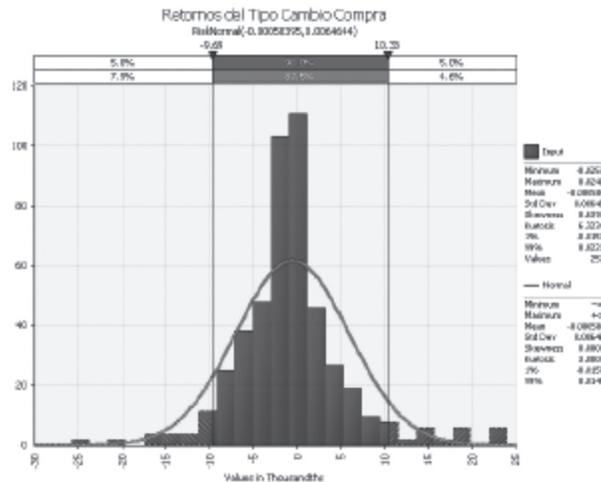
Dadas tales diferencias, en la figura se aprecia lo que mencionan los textos a lo referente de la presencia de colas gruesas de la función de probabilidad empírica con respecto a la función de probabilidad normal, y que tiene implicaciones en la estimación del valor en riesgo. Para el caso particular del tipo de cambio compra colón-dólar esta no es la excepción, debido a que la función de densidad empírica (histograma de los retornos) es asimétrica y leptocúrtica⁷, características que hacen más probable la ocurrencia de variaciones del tipo de cambio en los extremos de las colas; por lo tanto el suponer normalidad de los retornos para las estimaciones de valor en riesgo se estaría subestimando el percentil 1 %, cuando en realidad este percentil está ubicado en un punto más cercano al extremo de la cola izquierdo de la función de densidad empírica (histograma de los retornos).

Entre muchas implicaciones al suponer normalidad de los retornos y que compete en la gestión del riesgo, está el de la subestimación o sobreestimación del valor en riesgo; aún así, esta metodología no debería ser validada por el cumplimiento del supuesto de normalidad sino en validar el desempeño de tal metodología, por lo que para ello se aplica *backtesting* o pruebas retrospectivas.

6 Kurtosis mide el nivel de concentración central alrededor de la media de la función de distribución de probabilidad.

7 Leptocúrtica: los datos de la muestra están muy cercanos al valor promedio.

FIGURA 3.1.2
COMPARATIVO DE FUNCIONES DE DENSIDAD EMPÍRICA Y
NORMAL DE LOS RETORNOS DEL TIPO DE CAMBIO COMPRA COLÓN-DÓLAR,
AGOSTO 2009 –AGOSTO 2010.



Fuente: Elaboración propia.

3.2 Metodología Simulación Histórica

Esta metodología tiene como propósito valorar la posición neta en dólares ante las variaciones del tipo de cambio compra observado en el último año. Se estas variaciones del tipo de cambio compra del último año observado a la posición neta en dólares, y se concluye que el mejor pronóstico de máxima pérdida esperada es la máxima pérdida observada en el último año a un nivel de confianza del 99% si el tipo de cambio evoluciona tal y como lo hizo el último año.

Actualmente la máxima pérdida esperada (VaR) es calculada por los siguientes pasos:

- Se calculan los retornos logarítmicos diarios del tipo de cambio compra observado en el último año.
- Se ordenan de forma ascendentes los retornos logarítmicos diarios del tipo de cambio compra.
- Obtener el percentil 1% de los retornos ordenados; percentil que corresponde a la observación número 3 de los retornos logarítmicos ordenados ascendentemente.

- Se define el valor en riesgo como $VaR = PNME * \text{Percentil } 1\%$, siendo PNME la posición neta en moneda extranjera.

Aplicando esta metodología tomando como base los retornos logarítmicos diarios comprendidos entre el mes de agosto 2009 y agosto 2010 se tienen los siguientes resultados:

CUADRO 3.2.1.
VALOR EN RIESGO:
METODOLOGÍA SIMULACIÓN HISTÓRICA.

Riesgo Cambiario Simulación Histórica Al 31 Agosto 2010	
PNME	\$95,391,031.61
Percentil 1%	1.58%
VaR	¢759,481,736.9
Tipo Cambio Compra	504.12
Indice Riesgo Cambiario	1.58%

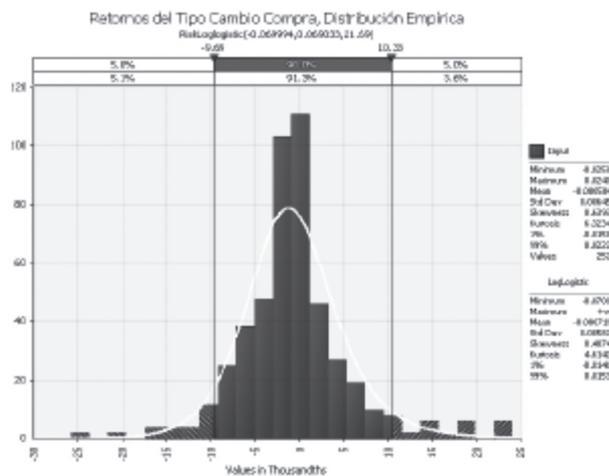
Fuente: Elaboración propia

Del cuadro 3.2.1 se nota como el requerimiento de capital por riesgo cambiario(VaR) a un día de ¢759,4 millones de colones es mayor

al requerimiento de capital obtenido por la metodología Delta - Normal, dejando claro que el suponer normalidad sobre los retornos logarítmicos del tipo cambio compra se subestima el valor en riesgo. Por otro lado, otra desventaja que presenta la metodología Delta-Normal es la no valoración completa de la posición neta algo que es corregido al emplear la metodología

simulación histórica con la debilidad de que el mejor pronóstico de la máxima pérdida esperada es la máxima pérdida observada en el último año a un 99% de confianza. La figura 3.2.2 muestra la función de distribución de probabilidad empírica de los retornos logarítmicos del tipo cambio compra colón-dólar para el periodo agosto 2009 - agosto 2010.

FIGURA 3.2.2
FUNCIÓN DE DENSIDAD EMPÍRICA DE LOS RETORNOS,
AGOSTO 2009 - AGOSTO 2010.



Fuente: Elaboración propia.

3.3 Metodología Simulación Monte Carlo

Esta metodología consiste en simular las variaciones logarítmicas diarias del tipo de cambio compra, a partir de la función de distribución de probabilidad que mejor distribuye estas variaciones en el último año; por lo tanto el cálculo de VaR se basa en:

1. Determinar la función de distribución de probabilidad que mejor describe el comportamiento de los retornos logarítmicos diarios del tipo de cambio compra observados en el último año.
2. Obtenida la función de probabilidad que mejor describe simulan 10,000.0 retornos del tipo de cambio.

3. Ordenar ascendentemente los retornos simulados.
4. Obtener el percentil 1% de los 10,000.0 retornos ordenados, este percentil corresponde a la observación número 100 de los retornos ordenados del paso anterior.
5. Calcular el VaR, definido como $VaR = PNME * \text{Percentil } 1\%$, siendo PNME la posición neta en moneda extranjera (dólares).

Dada la metodología de cálculo para el mes de agosto-2010 se tienen los siguientes resultados:

CUADRO 3.3.1
RIESGO CAMBIARIO: METODOLOGÍA
SIMULACIÓN DE MONTE CARLO.

Riesgo Cambiario Simulación Monte Carlo Al 31 Agosto 2010	
PNME	\$95,391,031.61
Percentil 1%	1.49%
VaR	¢716,471,179.17
Tipo Cambio Compra	504.12
Indice Riesgo Cambiario	1.49%

Fuente: Elaboración propia

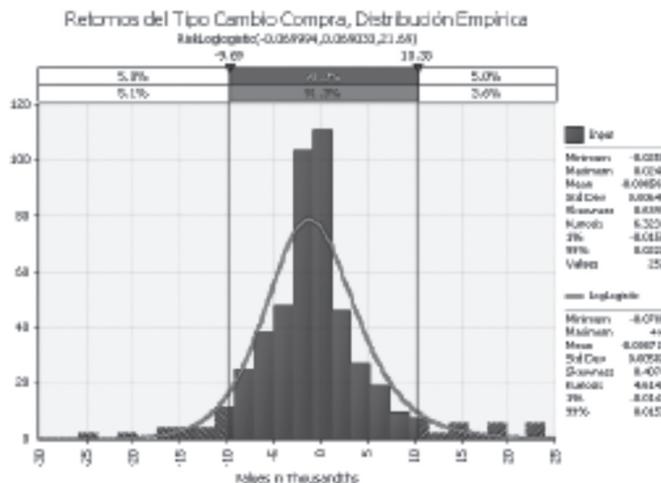
Del cuadro 3.3.1 se destaca que el requerimiento de capital por riesgo cambiario (VaR) de ¢716.4 millones de colones es menor a los requerimientos de capital estimado por las metodologías anteriormente citadas; estas diferencias se debe a que la función de probabilidad que mejor ajusta al histograma de los retornos en el último año según criterio de ajuste Anderson-Darling⁸ es la función de probabilidad

Log-Logística(-0.069994,0.069033,21.69) con parámetro de ubicación $\gamma = -0;069994$, parámetro de forma $\beta = 0;069033$ y de escalar $\alpha_- = 21;69$; esta función presenta sesgo hacia la cola derecha, con alta kurtosis (leptokúrtica⁹); siendo así esta función, es más probable que esta simule retornos del tipo de cambio ubicados en la cola derecha (variaciones positivas del tipo de cambio) que retornos del tipo de cambio ubicados en la cola izquierda de la distribución (variaciones negativas del tipo de cambio). Las características anteriormente citadas hacen que las estimaciones de VaR difieran de las anteriores; la figura 3.3.2 muestra diferencias entre la función de probabilidad que mejor ajustó el histograma de los retornos.

8 Criterio estadístico usado para probar la calidad del ajuste de datos muestrales continuos a distribuciones de probabilidad continuas.

9 Leptocúrtica: los datos de la muestra están muy cercanos al valor promedio.

FIGURA 3.2.2
FUNCIÓN DE DENSIDAD QUE MEJOR AJUSTA EL HISTOGRAMA DE LOS RETORNOS,
AGOSTO 2009 - AGOSTO 2010



Fuente: Elaboración propia.

3.4 Validación de Metodologías VaR

Dadas las metodologías que estiman el VaR, se evalúa el desempeño de estas empleando la prueba estadística de Kupiec o proporción de fallos¹⁰, esta prueba modela las diferencias entre los resultados reales de pérdidas y las estimadas por las metodologías VaR; en otras palabras, se comprueba si las metodologías que estiman el VaR actualmente garantizan el nivel de confianza del 99%.

Se aplicó la prueba de proporción de fallos en el intervalo de tiempo comprendido entre julio 2009 - julio 2010; para ello se realizaron las siguientes actividades:

1. Construir una base de datos con 252 estimaciones de VaR, para cada una de las metodologías.
2. Definir una variable indicadora (I) de conteo; esta variable indica el momento en que la estimación de VaR falla, por lo tanto la variable I asumirá un valor igual a 1 si la variación observada del tipo de cambio compra es menor a la estimación del percentil 1 %, y el valor 0 en caso contrario; por lo tanto

$$I = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta TC < \text{Percentil } 1\% \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (2)$$

3. Definir una variable S que totalice el número de fallos VaR de las 252 estimaciones hechas de julio 2009 - julio 2010.
4. Calcular la proporción de fallos $\hat{p} = \frac{S}{252}$; esta proporción aproxima a la probabilidad de fallo de las metodologías VaR.
5. Calcular el estadístico de Kupiec definido como

$$LR = -2 * \log\left(\frac{p^S(1-p)^{252-S}}{\hat{p}^S(1-\hat{p})^{252-S}}\right) \quad (3)$$

donde:

p = margen de error teórico de las metodologías VaR.

6. Comparar la probabilidad de falla de las metodologías VaR (p) con la probabilidad estimada en el punto 4 (\hat{p}).
7. Contrastar la hipótesis de que la probabilidad de fallo de las metodologías VaR sea p contra la probabilidad de fallo estimada; para ello se utiliza la siguiente regla de decisión

$$\begin{cases} H_0 : p=1\% & \text{si } LR \leq \chi_{1\%,1} \\ \text{Rechazo de } H_0 & \text{si } LR > \chi_{1\%,1} \end{cases} \quad (4)$$

donde: $\chi_{1\%,1} = 6.635$ es el percentil 1% de una función de distribución de probabilidad Chi-Cuadrado con 1 grado de libertad.

Al aplicar la prueba de *backtesting* para las metodologías, se obtuvieron los siguientes resultados que se muestran en el cuadro 3.4.1.

CUADRO 3.4.1
RESULTADOS PRUEBA DE PROPORCIÓN DE FALLOS VAR.

Prueba Estadística de Kupiec	Metodología		
	D. Normal	S. Histórica	Monte Carlo
Observaciones	252	252	252
Numero de fallos (X)	8	5	14
p teórico del modelo	1.00 %	1.00 %	1.00 %
Nivel de confianza teórico	99 %	99 %	99 %
Estimador puntual de p	3.17 %	1.59 %	3.57 %
Nivel de Confianza Observado	96.83 %	98.41 %	96.43 %
Estadístico LRKupiec	3.3	0.7	6.84
Valor de Prueba Chi-cuadrado	6.635	6.635	6.635
Criterio LRKupiec > valor chi-cuadrado	No Rechazo	No Rechazo	Rechazo
Conclusión del Metodología	Preciso	Preciso	Impreciso
Probabilidad de aceptar metodología sesgada	86.9 %	43.9 %	96.14 %

Fuente: Elaboración propia.

10 Prueba de proporción de fallos de Kupiec, que evalúa la hipótesis nula que la probabilidad de falla sea igual al 1%, es decir, si se calcula el VaR al 99 %, entonces se prueba que en realidad falla el 1% de las estimaciones VaR hechas. Vease, Hass Marcus, *New Methods in Backtesting, Financial Engineering*, 2001

Del cuadro anterior se concluye que de las 3 metodologías que estiman el requerimiento de capital por riesgo cambiario; la metodología por simulación histórica garantiza una estimación del 98.41% de confianza, seguida por la metodología Delta-Normal cuya estimación es garantizada al 96.83% de confianza y la peor de las estimaciones es dada por la metodología simulación de Monte Carlo con un 96.43% de confianza. Por otro lado, las metodologías Delta-Normal y Simulación Histórica a pesar de que pasan la prueba estadística de *Kupiec*, existe la probabilidad del 86.9% y un 43.9% de que estas metodologías lleguen a arrojar resultados menos confiables; con respecto a las estimación VaR hechas por la metodología simulación de Monte Carlo, que está garantizando una estimación del 95% de confianza en lugar del 99% de confianza.

Dado lo anterior, hasta julio del 2010 estas metodologías están garantizando una estimación de requerimiento de capital por riesgo cambiario del 98% de confianza, con un margen de error en la estimación del 2%. A pesar de que las metodologías pasan la prueba de *Kupiec*, se corre el riesgo de continuar utilizando metodologías sesgadas, y que en algún momento van a tener un desempeño no tan bueno a pesar del buen desempeño que han tenido en los últimos 12 meses; con respecto a la metodología de Monte Carlo, esta metodología no es precisa en sus estimaciones de VaR, pues no está dando el nivel de confianza esperado del 99 %, lo que muestra que no siempre el simular una variación de cualquier variable, en particular el retorno logarítmico del tipo de cambio se considera Monte Carlo, cuando en realidad la simulación de Monte Carlo es utilizada para simular un proceso estocástico de estimación.

En conclusión estas metodologías están haciendo buenas estimaciones de requerimiento de capital por riesgo cambiario, aún así conforme el mercado cambiario se torne más volá-

til, ha de esperarse que el desempeño de estas metodologías caiga por cambios en las reglas de negocios en el mercado cambiario, por ejemplo, pasar de un sistema cambiario de bandas al de flotación sucia tal y como sucede actualmente.

4 MODELO ARMA(P,Q)-GARCH(P,Q) Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.

4.1. Planteamiento teórico del modelo

Actualmente en el mercado cambiario costarricense, la variación diaria del tipo de cambio es asimétrica, leptokúrtica, que agrupa periodos de volatilidad persistentes en el tiempo, característica que no es capturada por los modelos actualmente utilizados en el Departamento de Riesgos Financieros. Para capturar tal característica se aplican los modelos los Garch; a continuación se establece el planteamiento teórico del modelo.

Los modelos Garch suponen que el nivel medio condicionado de la variación logarítmica diaria del tipo de cambio sigue un proceso ARMA(p,q) con varianza cambiante en el tiempo modelada por el proceso Garch(p,q)¹¹. Los modelos Garch cumplen con la función de estimar como ya se mencionó la varianza de las variaciones logarítmicas diarias del tipo de cambio; modelos que suponen que la varianza cambia a través del tiempo, y que a diferencia de otros modelos, en particular de los modelos AR(p) y ARMA(p,q), incorporan el nivel de equilibrio de volatilidad de largo plazo.

Los modelos Arma(p,q)-Garch(p,q) están en función:

1. del cuadrado de los errores rezagados (innovaciones) del modelo AR(p); errores que se derivan de la ecuación de regresión de la media condicional.

¹¹ Bollerslev T, Engle R.F y D.B Nelson, *Arch models: Handbook of Econometrics*, Vol IV, 1986.

$$R_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i R_{t-i} + \varepsilon_t \quad \text{con } c \geq 0, \phi_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, p \quad (5)$$

2. del nivel de varianza del periodo anterior (término autorregresivo).

Por lo tanto, la varianza condicionada sigue el siguiente proceso, (6)

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad \text{con } \omega \geq 0, \alpha_i \geq 0 \text{ y } \beta_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, p, q \quad (6)$$

que en conjunto con el proceso de media condicional, definen el proceso estocástico

$$\left\{ \begin{array}{l} R_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i R_{t-i} + \varepsilon_t \quad \text{siendo } c \geq 0 \text{ y } \phi_i \geq 0 \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad \text{siendo } \omega \geq 0, \alpha_i \geq 0 \text{ y } \beta_i \geq 0 \end{array} \right\} \quad (7)$$

Por otro lado, como ya se mencionó, los modelos Garch permiten estimar el nivel de equilibrio de volatilidad de largo plazo, siempre y cuando la variación del tipo de cambio sea estacionaria, y para ello se requiere probar las siguientes hipótesis:

1. la serie de tiempo descrita por la variación logarítmica diaria del tipo de cambio sea estacionaria¹².
2. al estimar los parámetros¹³ del modelo Garch se tienen que cumplir las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{l} a) \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{i=1}^q \beta_i < 1 \\ b) \omega \geq 0 \text{ y que los } \alpha_i \geq 0 \text{ y } \beta_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, p, q \end{array} \quad (8)$$

Donde la suma $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{i=1}^q \beta_i$ se conoce como persistencia de volatilidad; al ser cercana a 1 es mayor la persistencia de volatilidad en el tiempo.

Para el caso particular del proceso AR(1)-Garch(1,1) estacionario, el nivel pro-

medio de variación logarítmica diaria del tipo de cambio es modelado por el proceso autorregresivo de orden 1 (AR(1)) y la varianza de estas variaciones modelada por el proceso Garch(1,1), por lo tanto el proceso a seguir se define:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_t = c + \phi R_{t-1} + \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha \sigma_{t-1}^2 + \beta \varepsilon_{t-1}^2 \end{array} \right. \quad \text{siendo } \omega \geq 0, \alpha \geq 0 \text{ y } \beta \geq 0 \quad (9)$$

12 La variación logarítmica del tipo de cambio es una serie de tiempo estacionaria si cumple con:

1. $E[R_t] = \mu$
2. $\text{Varianza}[R_t] = \sigma^2$
3. $\text{Cov}[R_t, R_k] = 0, \forall t \neq k$

13 Los parámetros son estimados utilizando el criterio máxima verosimilitud, optimizado por métodos heurísticos de búsqueda local o bien el método de Gauss-Newton para sistemas no lineales.

Donde:

- R_t : nivel promedio de las variaciones diarias del tipo de cambio.
- σ_t^2 : varianza de las variaciones diarias del tipo de cambio.

Dado el proceso estacionario de la variación del tipo de cambio, se puede establecer el nivel de equilibrio de volatilidad de largo plazo. Por lo tanto el estado estacionario de la variación del tipo de cambio permite suponer que $\forall t \quad E[\sigma^2] = \sigma_t^2 = \sigma_{t+1}^2$, que la volatilidad esperada converge a un equilibrio de largo plazo; equilibrio de volatilidad de largo plazo dado por:

$$\sigma_{\infty}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \quad (10)$$

Siendo:

- ω : Nivel de volatilidad de largo plazo.
- α : Relación funcional entre de la volatilidad actual con la del periodo anterior.
- β : Relación funcional entre la volatilidad actual y los *shocks* (ε_t^2) no explicados por el modelo de media condicional.

Con el nivel de equilibrio de volatilidad de largo plazo, se puede determinar la estructura intertemporal de volatilidad de la variación diaria del tipo de cambio; esta estructura se define:

$$\sigma_{t+K}^2 = \alpha_{\infty}^2 + (\alpha + \beta)^{K+1}(\sigma_{t+1}^2 - \sigma_{\infty}^2) \quad (11)$$

De la ecuación (11), al estar en estado estacionario la variación del tipo de cambio se requiere que $\alpha + \beta \leq 1$ para alcanzar el equilibrio de largo plazo y poder hacer inferencia sobre la persistencia de volatilidad del tipo de cambio en el tiempo. El estudio de esta persistencia permite hacer previsiones de volatilidad en el tiempo; es decir, concluir si el nivel actual de volatilidad está por encima del nivel de equilibrio de volatilidad de largo plazo o bien si el nivel actual de volatilidad está por debajo del nivel de equilibrio, la previsión hacia el alza de la volatilidad del tipo de cambio.

Entre las ventajas de los modelos Garch se destacan:

Capturan el exceso de kurtosis (colas gruesas) y *clustering* o periodos de agrupamiento de volatilidad.

1. Calcular el nivel de volatilidad de largo plazo.
2. Estimar la estructura intertemporal de volatilidad del tipo de cambio.
3. Los estimadores tienden a ser consistentes estadísticamente.
4. Hacer una estimación de requerimiento de capital por riesgo cambiario más precisa.

Entre las desventajas de aplicar este tipo de modelos están:

1. Se requiere que la serie en estudio alcance el estado estacionario o bien reversión a la volatilidad media de largo plazo.
2. Suponer que las variaciones logarítmicas diarias del tipo de cambio sean normal con media y varianza; y así estimar los parámetros por máxima verosimilitud¹⁴

4.2. Análisis estadísticos de las variaciones del tipo de cambio

La base de datos utilizada para el estudio, considera las variaciones de la cotización del tipo de cambio monex colón-dólar en el periodo comprendido entre agosto-2009 y agosto-2010, periodo del cual la divisa empieza a tener mayor volatilidad.

Entre las principales características que se destacan de los rendimientos del tipo de cambio están su estacionariedad y la distribución de probabilidad de estos; no obstante no deja de ser importante conocer los momentos muestrales de tal variable; el cuadro 4.2.1 se destacan los momentos muestrales del rendimiento del tipo de cambio Monex.

¹⁴ Se aplicarán métodos de optimización basados en heurísticas de búsqueda local o bien aplicando el algoritmo de optimización de Gauss-Newton

CUADRO 4.2.1.
MOMENTOS MUESTRALES DEL RENDIMIENTO DEL TIPO DE CAMBIO

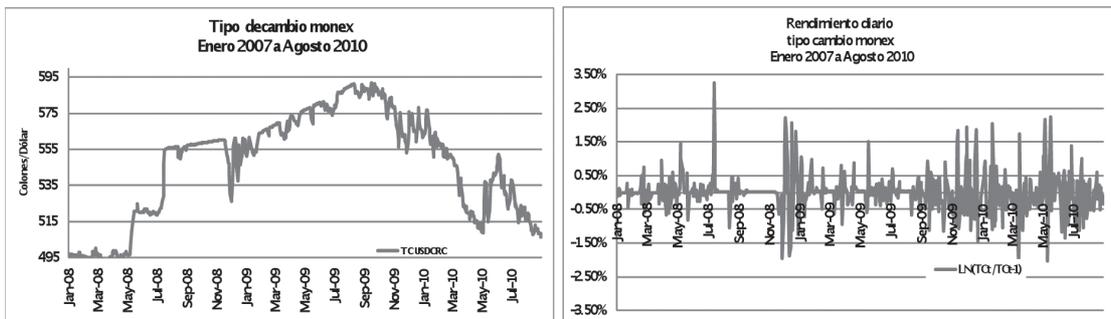
Momentos muestrales: Rendimiento Tipo Cambio	
Tamaño muestra	253
Media	-0.00058
Desviación Estándar	0.00663
Máximo	0.02234
Mínimo	-0.02240
Coefficiente de asimetría	0.57358
Kurtosis	1.76554
Jarque Berac	46.73
Pvalue-chi(2)	0.000
Prueba Chi(2) al 95 %	5.991464547
P Value	0
Nivel de confianza a %	95 %

Fuente: Elaboración propia.

De los momentos muestrales, se infiere que el rendimiento del tipo de cambio se mueve entorno un nivel constante cercano a cero; con varianza cambiando a lo largo del tiempo, en la que se destaca un comportamiento caracterizado por periodos en los que el tipo de cambio tiene mayor volatilidad

seguidos de periodos de baja volatilidad, periodos donde el tipo de cambio tiene cambios significativos; este comportamiento de *cluster* o de agrupamiento de volatilidad se va ir consolidando conforme mercado madure y emigre a la libre flotación; la figura 4.2.1 muestra este comportamiento.

FIGURA 4.2.1
TIPO DE CAMBIO Y RENDIMIENTO DEL TIPO DE CAMBIO, AGOSTO-09 A AGOSTO-10



Fuente: Elaboración propia.

Dado los momentos muestrales, Bollerslev, Engle y Nelson (1994) establecen que para poder aplicar los modelos Garch, las series de rendimientos deben cumplir con las hipótesis de estacionariedad y de normalidad; la primera de estas condiciones garantiza que la volatilidad del rendimiento

del tipo de cambio describe un proceso de reversión a la media, condición que permite poder establecer estructuras temporales de volatilidad, y la segunda hipótesis garantiza la estabilidad y consistencia de los parámetros estimados para el modelo Garch.

La estacionariedad de la serie de rendimientos del tipo de cambio colón - dólar se determina utilizando las pruebas estadísticas de Dickey Fuller Aumentado y Phillips Perron¹⁵;

el cuadro 4.2.2 muestra los resultados de las pruebas de raíz unitaria.

15 Estos Test prueban si la serie de rendimientos R_t es no estacionaria; es decir, la serie es no estacionaria si existe una raíz $\rho \geq 1$ del modelo

$R_t = \rho R_{t-1} + \xi_t$; en caso de que exista $\rho < 1$ se dice que el modelo $R_t = \rho R_{t-1} + \xi_t$ no tiene raíz unitaria, y la serie R_t es estacionaria.

CUADRO 4.2.2
PRUEBAS DE RAÍZ UNITARIAS: DICKEY-FULLER Y PHILLIPS-PERRON

adftest					
Rezagos	H	pValue	Stat	cValue	Conclusión
1	1	0.00	-52.86	-1.94	Estacionaria
2	1	0.00	-52.86	-1.94	Estacionaria
3	1	0.00	-10.88	-1.94	Estacionaria
pptest					
Rezagos	H	pValue	Stat	cValue	Conclusión
1	1	0.00	-52.86	-1.94	Estacionaria
2	1	0.00	-14.70	-1.94	Estacionaria
3	1	0.00	-14.46	-1.94	Estacionaria

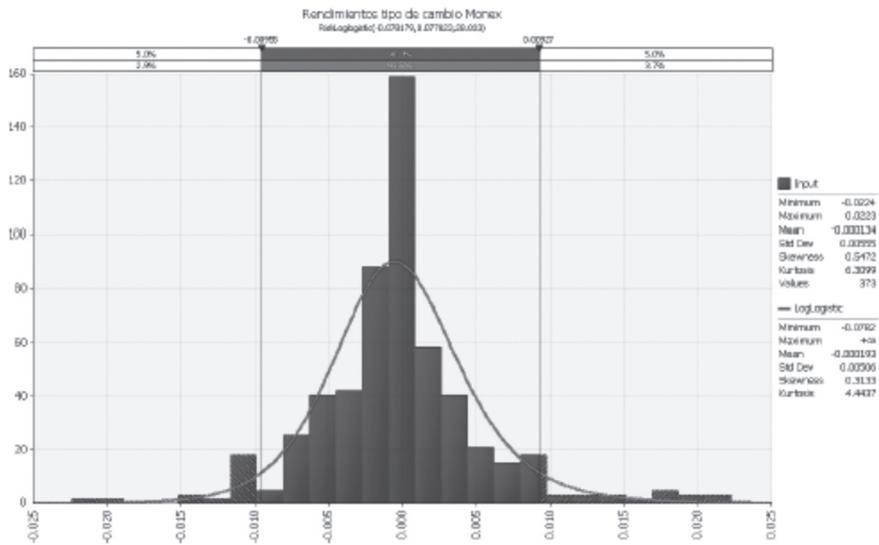
Fuente: Elaboracion propia.

Las 2 pruebas de raíz unitarias, rechazan la hipótesis que la serie de rendimientos del tipo de cambio es no estacionaria, ya que se rechaza la existencia de una raíz unitaria del modelo $R_t = \rho R_{t-1} + \xi_t$; por lo que *shocks* sufridos por el tipo de cambio en el corto plazo serán temporales convergiendo luego a la media; es decir, la volatilidad tiende a ser un proceso de reversión a la media.

Con respecto a la normalidad de los rendimientos del tipo de cambio, estos no tienen

la forma de campana de gauss y el estadístico Jarque Bera rechaza la hipótesis de que los parámetros de kurtosis y de asimetría corresponden a los de una distribución de probabilidad normal; por lo tanto los rendimientos del tipo de cambio no se comportan exactamente como una normal. La figura 4.2.2 muestra el histograma y la mejor distribución de probabilidad que ajusta a los rendimientos del tipo de cambio observados desde agosto-2009 hasta agosto-2010.

FIGURA 4.2.2
BEST FIT DE RENDIMIENTOS DEL TIPO DE CAMBIO, AGOSTO-09 A AGOSTO-10



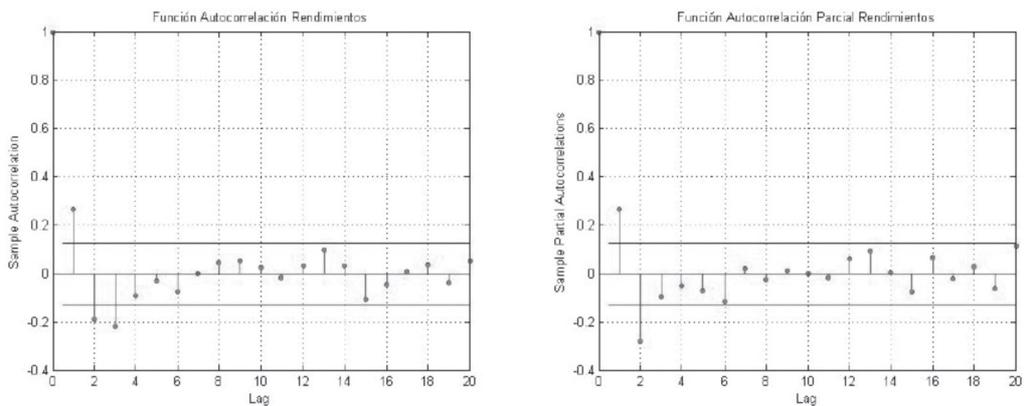
Fuente: Elaboración propia.

4.3 Estimación del modelo Ar(p)-Garch(p,q)

Dadas las principales características de los rendimientos del tipo de cambio, se estima el modelo Ar(p)-Garch(p,q) para una muestra comprendida entre agosto-2009 a agosto-2010.

Para la estimación del modelo de media condicional Ar(p); autoregresivo de orden p, el orden del rezago es determinado utilizando las funciones de correlación y autocorrelación parcial de la serie de retornos. De la figura 4.3.1 se muestra el orden de autocorrelación y autocorrelación parcial de los rendimientos.

FIGURA 4.3.1
FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN Y AUTOCORRELACIÓN PARCIAL DE RENDIMIENTOS TIPO CAMBIO, AGOSTO-09 A AGOSTO-10



Fuente: Elaboración propia.

Dadas las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, se estiman 3 procesos Ar(p) - Garch(1,1); de los cuales por el criterio de máxima verosimilitud y de información de Akaike, el proceso Ar(2)-Garch(1,1) resulta ser

el adecuado para modelar la media y la varianza condicional de los rendimientos diarios del tipo de cambio. El cuadro 4.2.3 muestra los 3 procesos estimados.

CUADRO 4.2.3
MODELOS AR(P)-GARCH(1,1) PARA RENDIMIENTOS TIPO DE CAMBIO
AGOSTO-09 A AGOSTO-10

	Modelo 1			Modelo 2			Modelo 3		
	Modelo AR(0) GARCH(1,1)	E. Estandar	Estadís. T	Modelo AR(1) GARCH(1,1)	E. Estandar	Estadís. T	Modelo AR(2) GARCH(1,1)	E. Estandar	Estadís. T
p	0			1			2		
C	-7.26E ⁻⁰⁴	0.00029039	-2.499	-5.01E ⁻⁰⁴	0.00033	-1.5178	-6.83E ⁻⁰⁴	0.0003	-2.1169
AR1				0.1738	0.0680	2.5536	0.2390	0.0721	3.4733
AR2							-0.2539	0.0670	-3.9232
K	8.55E ⁻⁰⁶	2.35E ⁻⁰⁶	3.6303	7.68E ⁻⁰⁶	2.39E ⁻⁰⁶	3.2188	8.16E ⁻⁰⁶	2.23E ⁻⁰⁶	2.9661
Garch	0.3298	0.0968	3.4083	0.4104	0.1029	3.9905	0.3937	0.1069	3.9572
Arch	0.5669	0.1090	8.39	0.4703	0.1014	4.6399	0.4546	0.1033	4.5954
LLF	935.89			938.68			943.22		
AIC	-1863.79			-1869.35			-1885.75		

Fuente: Elaboración propia.

Por lo tanto, la especificación del modelo de media-varianza condicional queda especi-

ficado por las siguientes ecuaciones para cada día que se hagan las estimaciones.

$$\begin{cases} R_t = c + \phi R_{t-1} + \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha \sigma_{t-1}^2 + \beta \varepsilon_{t-1}^2 \end{cases} \text{ siendo } \omega \geq 0, \alpha \geq 0 \text{ y } \beta \geq 0 \quad (12)$$

La ecuación de media condicional nos dice que el tipo de cambio varía en la misma dirección que la del día anterior en una magnitud aproximadamente de 0.2390% y del 0.2540% en la dirección contraria a la observada en el día tras anterior; estas relaciones son apreciadas a través de las funciones de autocorrelación y autocorrelación, en la que muestran que la variación del tipo de cambio mantiene tendencia de un día a otro con cambios de tendencia a partir del segundo día. Con respecto a las fluctuaciones de volatilidad, si la volatilidad estimada para un determinado día es del 1% y en ese día el precio de la divisa varía en un 1%,

estaríamos para el día siguiente una volatilidad del 0.85 %.

Dado lo anterior, y como parte del análisis post-estimación, se procede a probar si los procesos de media y varianzas están bien especificados; para ello se aplican las pruebas estadísticas Q de Ljung-Box y Archtest de Engle para probar si los errores estandarizados $\left(\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}\right)$ son no correlacionados, y no existe la presencia de efectos Arch en estos. Los resultados de las pruebas Archtest de Engle son mostradas en el cuadro 4.2.4 test

CUADRO 4.2.4
PRUEBAS Q LJUNG-BOX Y ARCHTEST DE ENGLE

lbqtest					
Rezagos	H	pValue	Stat	cValue	Conclusión
1	0	0.99	0.52	11.07	No correlacionados
2	0	0.94	4.25	18.30	No correlacionados
3	0	0.99	4.65	24.99	No correlacionados

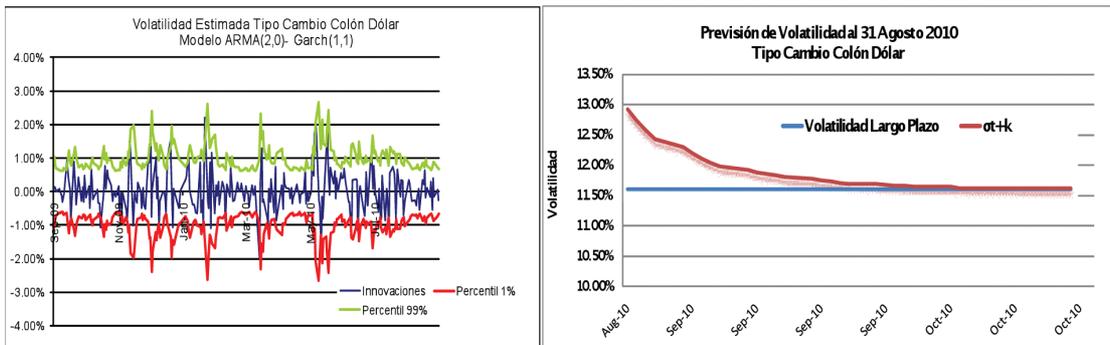
archtest					
Rezagos	H	pValue	Stat	cValue	Conclusión
1	0	0.99	0.43	11.07	No existe efectos Arch
2	0	1.00	1.97	18.30	No existe efectos Arch
3	0	1.00	3.39	24.99	No existe efectos Arch

Fuente: Elaboración propia.

Claramente, en todos los rezagos estudiados, los residuos no presentan autocorrelación ni presencia de efectos Arch al 95% de

confianza; por ende la especificación del modelo de media condicional (Ar(2)) y varianza condicional Garch(1,1) son los adecuados.

FIGURA 4.3.2
ESTRUCTURA INTERTEMPORAL DE VOLATILIDAD Y VOLATILIDAD ESTIMADA DEL TIPO DE CAMBIO, AGOSTO-09 A AGOSTO-10



Fuente: Elaboración propia.

Como el proceso descrito por los modelos de media y varianza condicional son estacionarios, el nivel de equilibrio de volatilidad de largo plazo anualizado es 11.60 %. La estructura temporal de volatilidad nos dice que la previsión de volatilidad es hacia la baja tendiendo al nivel de equilibrio de largo plazo; actualmente con un nivel de volatilidad anualizada de 12.91 %, ante un shock de volatilidad al 30 julio este tardaría aproximadamente 35 días hasta que la volatilidad se establezca a los niveles de largo plazo.

Dado el modelo de volatilidad AR(2)-Garch(1,1) propuesto, el requerimiento de

capital por riesgo cambiario al 99% de confianza para 1 día es de ¢470.7 millones de colones, requerimiento que es menor al calculado por las demás metodologías, esta estimación es el resultado de la no sobre apalancamiento del requerimiento de capital. Por otro lado, la calidad estadística de las estimaciones de volatilidad hechas por este modelo, son medidas utilizando el *backtesting* y para ello se calcula la proporción de veces en que la variación del tipo de cambio observada quedó dentro del intervalo de confianza (nivel de confianza del 99 %).

CUADRO 4.2.5
RESULTADOS PRUEBA DE PROPORCIÓN DE FALLOS VAR

Prueba Estadística de Kupiec	Metodología			
	D. Normal	S. Histórica	Monte Carlo	Ar(2)-Garch(1,1)
Observaciones	252	252	252	252
Numero de fallos (X)	8	5	14	4
p teórico del modelo	1.00 %	1.00 %	1.00 %	1.00 %
Nivel de confianza teórico	99 %	99 %	99 %	99 %
Estimador puntual de p	3.17 %	1.59 %	3.57 %	1.59 %
Nivel de Confianza Observado	96.83 %	98.41 %	96.43 %	98.41 %
Estadístico LRKupiec	3.3	0.7	6.84	0.7
Valor de Prueba Chi-cuadrado	6.635	6.635	6.635	6.635
Criterio LRKupiec > valor chi-cuadrado	No Rechazo	No Rechazo	Rechazo	No Rechazo
Conclusión del Metodología	Preciso	Preciso	Impreciso	Preciso
Probabilidad de aceptar metodología sesgada	86.9 %	43.9 %	96.4 %	43.9 %

Fuente: Elaboración propia.

En manera de conclusión, la especificación del proceso Ar(2)-Garch(1,1) es el adecuado para modelar la media y la varianza condicional de los rendimientos del tipo de cambio, rendimientos que sigue un proceso con reversión a la media (volatilidad de largo plazo σ_{∞}) y que permiten obtener estimación del requerimiento de capital por riesgo cambiario más confiable una previsión de volatilidad a cualquier horizonte de tiempo en comparación a los modelos actualmente utilizados por las Oficina de Riesgos Financieros.

5. CONCLUSIONES

El mercado cambiario al pasar de un régimen de minidevaluaciones al de bandas cambiarias y a hoy por la migración de bandas a flotación sucia del tipo de cambio, ha implicado en incrementos en la volatilidad del tipo de cambio más no así una clara tendencia de este, es por ello que los modelos que estiman las pérdidas por exposición a los vaivenes del tipo de cambio utilizados deben ser sometidos a pruebas retrospectivas (*backtesting*) y conocer su confiabilidad de las estimaciones.

Dado lo anterior, del presente trabajo se desprende que si actualmente en las oficinas de riesgos son empleadas estas 3 metodologías; las estimaciones son confiables en un 98% de confianza, resultados que son muy buenos al compararlos con el nivel de confianza teórico garantizados por los modelos.

Sin embargo, estos resultados pueden ser complementados con la aplicación de modelos más complejos como los ARMA(p,q)-Garch(1,1), que permiten hacer estimaciones de pérdidas esperadas más confiables y realizar previsiones de volatilidad del tipo de cambio.

Del presente trabajo se desprende lo que mencionan muchos textos sobre estos modelos; y es que estos modelos mantienen su certeza conforme haya volatilidad; por lo tanto, queda demostrado en este artículo que de permanecer la volatilidad del mercado cambiario tal y como se ha desarrollado en los últimos seis meses, se pueden aplicar estos modelos en la administración de riesgos, tener estimaciones más confiables en comparación a las metodologías usualmente empleadas; permitir establecer límites de exposición a riesgo cambiario y a su vez establecer objetivos de rentabilidad más ajustadas a la realidad del mercado.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Brandimarte Paolo, *Numericals Methods in Finance and Economics*, Politécnico di Torino, Italy, 2006.
- Bollerslev T, Engle R.F y D.B Nelson, *Arch models: Handbook of Econometrics*, Vol IV, 1986.
- Cobos Sergio, et al, *Búsqueda y Exploración Estocástica*, Universidad Autónoma Metropolitana, México, 2010.

- Dréo. J et al, *Metaheuristics for Hard Optimization*, Springer Verlag, 1er Edición, 2005.
- Garcia Centeno Maria del Carmen et al; *Estimación de Modelos de Volatilidad Estocástica en Series Rendimientos Bursátiles*, Universidad Complutense, Madrid, 2004.
- Hass Marcus, *New Methods in Backtesting*, Financial Engineering, 2001.
- Jorion Phillippe, *Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk*, Phillippe Jorion-2nd, 2001.
- Madsen.K et al, *Methods for Non Linear Least Squares Problems, Informatics and Mathematical Modelling* Technical University of Denmark, 2nd Edition, 2004.
- User guide:Econometrics Toolbox*, MatLab Ra2010.
- Análisis de los factores explicativos y tendencias del mercado Monex, Ecoanálisis, Marzo-2010.
- Sanchez Cerón Carlos, *Valor en Riesgo y Otras Aplicaciones*, SEI Investment, Sanchez Cerón -1nd, 2001.
- Trejos Alberto, *Pronóstico Económico CEFSA: porque sube y baja el tipo de cambio*, 2010.