

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO ESTRATEGIA METODOLÓGICA EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS: *UNA PROPUESTA*

Jennifer L. Fonseca Castro

jfonsec@una.ac.cr

Cristian Alfaro Carvajal

calfar@una.ac.cr

Escuela de Matemática

Universidad Nacional

Resumen

Tradicionalmente, la resolución de problemas ha sido utilizada como actividad posterior al desarrollo de conceptos matemáticos, donde la aplicación casi mecánica de los conceptos es el objetivo final. No obstante, recientemente se ha planteado un enfoque más moderno de la resolución de problemas como estrategia metodológica en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Este enfoque pretende dar al docente y al estudiante otros tipos de experiencias que les permita construir, revisar y extender sus sistemas conceptuales y de vivencia. En este sentido, se describe brevemente el aporte teórico en la Resolución de Problemas como estrategia metodológica de los enfoques planteados por Lesh (*Model-eliciting activities*), los japoneses (*Open-Ended problems*) y la metodología utilizada en un Seminario de graduación centrado en el tema de la Resolución de Problemas llevado a cabo en el año 2007 en la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional en Costa Rica. Esto con el objetivo de señalar e integrar aquellos elementos que deberían guiar la construcción e implementación de situaciones didácticas para la Resolución de Problemas como estrategia metodológica en la formación de docentes de matemática.

Palabras clave

Resolución de problemas, formación docente en Educación Matemática, Matemáticas, estrategias metodológicas en Enseñanza de las Matemáticas, modelos y modelando, problemas de cierre abierto.

Abstract

Traditionally, problem solving has been used as an activity after the

development of mathematical concepts, where the mechanical application of those concepts is the ultimate goal. However, a more modern approach proposes problem solving as a methodological strategy in the teaching and learning of mathematics. This approach aims to give teachers and students other experiences that allow them to build, revise, and extend their conceptual systems and experiences. We present in this article a brief description of the theoretical contributions of Lesh (*Model-eliciting activities*), the Japanese (*Open-Ended problems*), and the methodology used in a Seminar (a final requisite to complete a degree in Mathematics Education) conducted in 2007 at the School of Mathematics of the Universidad Nacional in Costa Rica, in order to draw those elements that should guide the construction and implementation of situations for problem solving as a methodological strategy in mathematics teacher education

Keywords

Problem solving, Mathematics teacher preparation, Mathematics, Methodological strategies in Mathematics Teaching, Model-eliciting activities, Open-Ended problems.

1. Introducción

La resolución de problemas se ha considerado como una importante estrategia para la enseñanza de las Matemáticas en estudiantes de Educación Media en diferentes partes del mundo. El NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) de los Estados Unidos), por ejemplo, lo ha consignado dentro de sus principios y estándares como un estándar de proceso y no de contenido. Por su parte, el Ministerio de Educación Pública (MEP) en Costa Rica contempla dentro de los programas vigentes de estudio a la resolución de problemas como la estrategia pedagógica más adecuada para el desarrollo de las lecciones.

Esto hace que la resolución de problemas permita abordar varias dimensiones en la Educación Matemática. Por un lado, integra objetivos interdisciplinarios dentro de las propias Matemáticas, por ejemplo, geometría, álgebra y funciones; así como multidisciplinarios, por ejemplo, Matemáticas, Ciencias e Historia. Por otro lado, potencia los aprendizajes activos y colaborativos dentro de los énfasis curriculares modernos.

Resolución de problemas, tradicionalmente, se ha utilizado como herramienta de evaluación y aplicación de conceptos matemáticos previamente estudiados. Bajo esta perspectiva, el conocimiento se presenta parcelado, y el resolver un problema se limita a proporcionar una respuesta predeterminada. No obstante, un enfoque más moderno de la resolución de problemas como estrategia metodológica en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas promete un aprendizaje más significativo e integral de conocimientos y experiencias para el estudiante y el docente.

El uso de la Resolución de Problemas como estrategia metodológica para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, ha tenido una importante evolución: desde el análisis de estrategias heurísticas de solución con Polya, hasta el estudio de elementos cognitivos más complejos con Schoenfeld, Brousseau, Lesh y otros.

Se han realizado diversos intentos para desarrollar la Enseñanza de las Matemáticas por medio de la resolución de problemas como una orientación pedagógica que logre en los estudiantes un aprendizaje más significativo de esta disciplina y de su utilización dentro y fuera del sistema educativo. Lo que se pretende con esto, es lograr un equilibrio entre los distintos niveles de complejidad de ejercicios y el propósito persistente de fortalecer y trabajar aquellos problemas que se escapan de lo rutinario. Aunque se han desarrollado importantes investigaciones sobre el uso de la Resolución de Problemas en niveles de primaria y secundaria, el tema no ha tenido un gran desarrollo en la formación de los docentes de Matemáticas. Sin embargo, si se pretende que los futuros profesores desarrollen la Resolución de Problemas como estrategia metodológica en los currícula de formación media, se debe gestar desde la formación en las universidades el uso de la resolución de problemas en el desarrollo de cursos propios de la Educación Matemática.

Para generar un planteamiento que permita emplear la resolución de problemas en la formación de docentes de matemática es necesario considerar los aportes teóricos de algunos investigadores que han potenciado esta temática en otros niveles educativos. En este sentido, se presenta el trabajo realizado por Lesh y colegas en resolución de problemas, el enfoque *Open-Ended* empleado por los japoneses, así como la experiencia del Seminario de Resolución de Problemas llevado a cabo en el año 2007 en la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional.

El objetivo de este trabajo es rescatar los elementos teóricos pertinentes que necesariamente deben estar presentes en la construcción de propuestas de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas mediante la resolución de problemas en los cursos de formación de docentes en esta disciplina.

En una primera parte de este trabajo se hace un resumen de algunos elementos teóricos para el desarrollo de la Resolución de Problemas como estrategia pedagógica. En esta perspectiva, se presenta la metodología de *Model-Eliciting Activities* (MEAs) desarrollada por Lesh y otros en distintas universidades norteamericanas, el trabajo de la escuela japonesa con el enfoque *Open-Ended* y, finalmente, los aportes teóricos del Seminario de graduación de Resolución de Problemas llevado a cabo en el año 2007 en la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional.

En la segunda parte, se rescatan los elementos teóricos presentes en los enfoques mencionados anteriormente, integrándolos para que sirvan de base en la implementación de Resolución de Problemas en las carreras de formación de docentes de Matemáticas.

2. MEAS: una metodología de trabajo en resolución de problemas

Desde la antigüedad, los problemas matemáticos han tenido su lugar de privilegio dentro del currículo matemático (Stanic & Kilpatrick, 1988). Sin embargo, existe una confusión sobre lo que se entiende por resolución de problemas. Mientras que algunos conceptualizan resolución de problemas como medio para poner en práctica lo aprendido o para el desarrollo de estrategias de solución de problemas; muy pocos utilizan resolución de problemas como estrategia didáctica o medio para la enseñanza de contenidos matemáticos (Schroeder & Lester, 1989).

Para Lesh y colegas, pioneros constantes del desarrollo de Resolución de Problemas en Matemáticas y otras disciplinas, un “problema no rutinario” debe permitir al estudiante definir, refinar, transformar y extender sus sistemas conceptuales con el propósito de crear interpretaciones adecuadas de la situación planteada (Lesh & Doerr, 2003b). Además, éste debe involucrar sistemas matemáticos interesantes que evidencien al estudiante la necesidad de construir modelos para la interpretación y explicación de la situación. El producto final debe ser la unión de modelos complejos o herramientas conceptuales que reflejen aspectos importantes de la forma de pensar de los estudiantes y puedan ser reutilizables en situaciones similares (Lesh & Yoon, 2004). Tanto el problema como el producto final que se espera de éste, deben facilitar la reflexión en los estudiantes

¹En esta dirección, modelos no se entiende como sinónimo de “ideal”; sino como herramientas conceptuales que incluyen sistemas explícitos descriptivos y/o explicatorios que revelan importantes aspectos sobre cómo los estudiantes interpretan y hacen uso de sus conocimientos previos y experiencias en distintas situaciones (Lesh & Doerr, 2003b). Dichos modelos tienden a ser expresados usando una variedad de representaciones y medios, por ejemplo, simbología escrita, oral, gráficos y metáforas.

a través de la documentación de sus aprendizajes y progresos, promoviendo así la externalización de sus razonamientos y formas de pensar (Lesh, Hoover, Hole, Nelly, & Post, 2000). Finalmente, la situación presentada debe ofrecer criterios para la evaluación de soluciones alternativas, así como para que los estudiantes juzguen por sí mismos los productos finales y sepan cuando tienen un modelo que les satisface (Lesh et. al., 2000).

Bajo esta perspectiva, la dinámica de la resolución de problemas consiste en la interpretación, búsqueda, selección y aplicación de datos o herramientas conceptuales para dar explicación a las situaciones propuestas; todo en un proceso cíclico de expresión, interpretación, definición, transformación y extensión de ideas y conceptos, los cuales son gradualmente ordenados, integrados, refinados, elaborados y/o rechazados (Lesh & Yoon, 2004; Zawojewski & Lesh, 2003).

Según estos autores, la enseñanza debe enfocarse en la estructuración cuidadosa de experiencias, en las cuales los estudiantes confronten la necesidad de construir modelos que les permitan constantemente expresar, evaluar y refinar o revisar sus formas de pensar. Con base en esta perspectiva, Lesh y colegas han trabajado en el diseño, implementación e investigación de experiencias que cumplan con las características de problema y resolución de problema antes descritos. Dichas experiencias son conocidas como, *actividades provocadoras de modelos* o "*model-eliciting activities* (MEAs)" y han mostrado tener un gran potencial en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en muchos de los niveles educativos—primaria, secundaria y universitaria (Lesh & Doerr, 2003a).

Los MEAs son actividades que permiten a los estudiantes definir, explorar, revisar y expresar sus conocimientos en un periodo de trabajo grupal de aproximadamente sesenta minutos. Estas actividades son diseñadas para estimular la solución de problemas significativos y de la vida real donde la información brindada no siempre se encuentra en forma explícita y pre-matematizada, y donde la respuesta final no se resume al uso de procedimientos y algoritmos. Durante esos sesenta minutos de trabajo, los estudiantes no sólo hacen uso de sus conocimientos previos, sino que también modifican y/o extienden estos conocimientos durante los diversos ciclos de integración, diferenciación, revisión y organización de ideas por los cuales pasan (Lesh & Yoon, 2004).

Estas actividades han sido utilizadas con distintos grupos meta, en diversos contextos, y para alcanzar distintos objetivos. Por ejemplo se han utilizado con estudiantes de pre-escolar, primaria y secundaria (Lamon, 2003; Shternberg & Yerushalmy, 2003); con estudiantes de ingeniería y enseñanza de las Ciencias y Matemáticas; en cursos de post-grado para la carrera de educación (Lesh, Zawojewski, & Carmona, 2003; Oakes & Rud, 2003); en la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos, de métodos pedagógicos y didácticos;

como estrategias para la resolución de problemas (Zawojewski & Lesh, 2003); y para el desarrollo de hábitos meta-cognitivos, de investigación y de reflexión (Lesh, Lester, & Hjalmarson, 2003; Middleton, Lesh, & Heger, 2003).

En la formación de docentes de matemáticas, estas actividades han adquirido un lugar distintivo en el planeamiento e instrucción de cursos de la disciplina—por ejemplo en estadística y probabilidad—y en cursos metodológicos y pedagógicos. La riqueza de los conocimientos y formas de pensar reflejadas en los productos finales (modelos), así como los procesos y ciclos de definición, revisión y modificación que se pueden observar durante las sesiones de trabajo, aportan componentes esenciales a la formación de docentes que son poco probables de encontrar en sesiones de resolución de problemas tradicionales.

A diferencia de los problemas tradicionales donde el objetivo principal es la evaluación de conceptos y procedimientos, MEAs brinda a los futuros docentes un contexto que les permite no sólo evaluar, sino construir y extender sus conocimientos matemáticos, pedagógicos y pedagógico-matemáticos, a la vez que construyen, interpretan y revisan modelos o situaciones generadoras de modelos.

La metodología empleada por Lesh en la implementación de MEAs como estrategias metodológicas en cursos de formación docente, se caracteriza por la multiplicidad de experiencias y roles que ésta ofrece a los futuros docentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esta metodología permite al futuro docente experimentar matemáticas y resolución de problemas desde una perspectiva más dinámica y creativa, donde su papel e ideas son fundamentales para alcanzar los objetivos finales.

Primero, es necesario que los futuros docentes experimenten por sí mismos lo que significa e implica resolver un problema con las características antes descritas. Durante sus experiencias como alumnos, los futuros docentes recopilan estrategias y actividades para utilizarlas con sus propios alumnos (Grossman, 1990). Bajo esta premisa, Lesh ofrece a los futuros docentes espacios para la solución y discusión de MEAs. Los futuros docentes trabajan en uno de los MEAs en forma grupal, presentando sus resultados a todo el grupo al final del proceso. Con esto, los futuros docentes tienen la oportunidad de experimentar los diversos ciclos de definición, revisión y modificación, al mismo tiempo que definen, revisan y modifican sus conocimientos matemáticos y pedagógico-matemáticos. Las sesiones de presentación y discusión después de cada sesión brindan a los futuros docentes espacios para generar discusión sobre las decisiones y estrategias matemáticas empleadas por cada grupo, así como de otros aspectos no tan conceptuales, pero igualmente importantes, como el trabajo en grupo y sentimientos encontrados. Esto les permite a los futuros docentes discutir y

revisar conceptos, ideas y estrategias matemáticas presentes en sus modelos y en los modelos de otros grupos.

Segundo, en complemento a las sesiones de trabajo en MEAs, los futuros docentes observan y analizan otros grupos meta trabajando en la solución de MEAs. Para esto, los futuros docentes hacen visitas presenciales u observan videos de otros grupos de estudiantes trabajando en los mismos MEAs que ellos ya trabajaron. Esto les brinda la oportunidad de experimentar estas actividades desde otra perspectiva, ya no como buscadores de soluciones sino como evaluadores y observadores de otros buscadores de soluciones. Al tratar de entender las estrategias de los estudiantes observados, los futuros docentes examinan y cuestionan sus conocimientos matemáticos, pedagógicos, y pedagógicos del contenido, así como sus propios modelos generados con anterioridad.

Después de las múltiples sesiones de resolución y observación, los futuros docentes tienen espacios para la construcción y diseño de nuevos MEAs. Esto último con el objetivo de brindar una nueva perspectiva y experiencia a los futuros docentes: de buscador de soluciones y observador, a diseñador.

La metodología empleada por Lesh permite al futuro docente cambiar de un papel pasivo, a un papel dinámico que requiere de creatividad, reflexión, y la construcción y revisión constante de aspectos cognitivos (matemáticos, pedagógicos y pedagógicos del contenido). El futuro docente experimenta y aprende desde las diferentes perspectivas: estudiante, profesor e investigador. Esto no sólo los dota con una sensibilidad particular para con sus alumnos, sino que también les permite seleccionar y construir actividades de mediación e instrucción en las que tanto ellos como sus estudiantes construyen y revisan conocimientos cognitivos y de crecimiento personal.

Este enfoque propone una transformación radical en la forma de planear una lección, en la selección de situaciones o problemas y por supuesto, en el conocimiento matemático que desea abordarse.

3. El enfoque “open-ended” de los japoneses

La metodología empleada por Lesh permite al futuro docente cambiar de un El sistema educativo japonés se ha caracterizado por los altos resultados de sus educandos y educadores en la resolución de problemas en pruebas internacionales estandarizadas, tales como PISA y TIMSS; así como por sus novedosos métodos educativos que han servido para el alcance de estos resultados. En las lecciones

japonesas predominan, por ejemplo, el desarrollo de contenidos matemáticos de media y alta calidad, así como actividades (e.g., resolución de problemas de “final abierto”) que involucran la construcción de nuevas soluciones y el uso de mayor formas de pensamiento y razonamiento.

El enfoque de resolución de problemas “*Open-Ended*” o de “final abierto” ha sido uno de los principales componentes en las metodologías utilizadas por los japoneses en sus aulas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dicho enfoque se originó en Japón en los años setenta con el propósito de estudiar y evaluar formas de razonamiento matemático de alto orden de los estudiantes (Inprasitha, 2009). Sin embargo, su aprovechamiento se ha extendido más allá, para convertirse en el principal medio de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las aulas japonesas (Sawada, 1997).

Los problemas de “final abierto” son formulados de tal manera que múltiples soluciones pueden ser generadas y evaluadas por los estudiantes como parte del proceso de resolución de problemas. Además, éstos son diseñados con la finalidad de servir como medio de partida para el desarrollo y descubrimiento de nuevos aprendizajes. Estos problemas se caracterizan por sus ricos contextos sociales que permiten enlazar los contenidos matemáticos con otras disciplinas y con la vida cotidiana del estudiante. La revisión, modificación y extensión de conocimientos, habilidades y experiencias previas de los estudiantes, son fundamentales en el desarrollo de estas actividades. Las soluciones y aportes propuestos por los estudiantes, determinan el contenido y dinámica de la lección. En estas actividades los métodos para llegar a las soluciones son tan o más importantes que la solución misma al problema (Shimada, 1997).

A través de la resolución de problemas de “final abierto” los estudiantes matematizan situaciones de la vida cotidiana y encuentran relaciones matemáticas mientras hacen uso de sus conocimientos y habilidades; estudian los métodos y soluciones de otros estudiantes; comparan y examinan las diferentes ideas; y modifican o desarrollan sus propias conjeturas sobre el tema acorde con la experiencia (Sawada, 1997).

La metodología de este enfoque propone una dirección completamente diferente a la tradicional. En el enfoque “*Open-Ended*” de los japoneses, las técnicas de resolución de problemas son utilizadas tanto para la solución del problema, como para el desarrollo y estructura de la lección misma (Sawada, 1999). A diferencia del enfoque tradicional (teoría→práctica/resolución de problemas→asignación de tarea), los docentes japoneses se enfocan en la solución de un solo problema de “final abierto” de principio a fin de sus lecciones. Estas inician con la presentación del problema a los estudiantes y los objetivos de la lección; así como una discusión de las posibles relaciones del problema y objetivos con otros problemas y temas

vistos anteriormente. Seguido, trabajan de forma individual o grupal en el problema con la supervisión mínima del docente. Posteriormente, los estudiantes presentan sus ideas y métodos a otros compañeros, lo cual genera espacios de discusión, revisión, comparación y extensión de conocimientos e ideas. La intervención del docente en dichas discusiones es fundamental para guiarlos en la búsqueda de nuevos conocimientos; pero siempre basando sus intervenciones en resultados e ideas (nuevas o previas) que los estudiantes han generado. Finalmente, los nuevos resultados y conocimientos se discuten y resumen en grupo; y se buscan situaciones similares donde lo aprendido sea útil.

El factor tiempo es esencial para el desarrollo exitoso de estas lecciones. Es indispensable que los estudiantes cuenten con suficiente tiempo para que investiguen la naturaleza del problema; generen y propongan múltiples soluciones; discutan y comparen cada solución posible; y reflexionen sobre lo aprendido y lo que pueden aprender (Sawada, 1999).

El papel del docente en este tipo de actividades se centra en la selección y/o diseño de problemas; además de guiar y propiciar la discusión y el análisis con una agenda claramente definida (Sawada, 1999). Para esto es necesario que el docente tenga un claro panorama del papel del problema en su clase, así como el manejo total de todas las posibles soluciones y métodos de solución del problema planteado.

La dinámica de estas actividades permite a los estudiantes participar más activamente en el proceso, expresar frecuentemente sus ideas en el aula y hacer uso comprensivo de sus conocimientos y habilidades. En estas actividades los estudiantes son motivados a proponer, justificar y probar sus conjeturas y respuestas, así como retro-alimentar sus ideas y las de sus compañeros. La aceptación de diferentes formas de pensar, hacer y resolver un problema, se vuelve tan importante para los estudiantes como la solución del problema mismo (Sawada, 1999).

Sin embargo, es posible que algunos estudiantes no acostumbrados a este sistema de aprendizaje experimenten momentos de ansiedad o sientan insatisfacción en su aprendizaje por su dificultad para resumir y sintetizar los conceptos aprendidos (Sawada, 1997). Es posible que encuentren dificultades para entender y responder a estos tipos de problemas; sin dejar de lado la dificultad para el docente a la hora de diseñar y preparar situaciones o problemas significativos que cumplan con los objetivos y características de los problemas de “final abierto” (Sawada, 1997).

4. Dinámica del seminario como una metodología de trabajo en resolución de problemas

Este seminario se llevó a cabo durante el año 2007 con la participación de cinco estudiantes egresados de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional en Costa Rica. El trabajo se realizó mediante sesiones semanales de discusión y análisis donde participaron los investigadores, el director del seminario y en algunas ocasiones expertos en investigación. Se formaron subgrupos de trabajo en donde cada uno seleccionó un tema de Matemáticas a nivel secundario para la construcción y aplicación de una propuesta pedagógica en un colegio de su escogencia.

La dinámica del Seminario consistió en sesiones de discusión que permitían a los estudiantes construir, revisar y modificar tanto sus conocimientos matemáticos, pedagógicos y pedagógico-matemáticos; esto a través de la revisión de teorías existentes en la Educación Matemática y en los temas matemáticos a desarrollar en las propuestas metodológicas, a saber, polígonos, estadística, y función exponencial y logarítmica. Asimismo, se hizo una revisión de problemas existentes sobre estos temas, algunas aplicaciones en campos no matemáticos e historia de estos conceptos lo cual aportó elementos valiosos para la construcción de una propuesta metodológica para secundaria basada en la resolución de problemas (Ramírez, González, Zumbado, Arias, Espinoza & Espinoza, 2008).

Cada subgrupo generó una propuesta que consistía en plantear al estudiante de secundaria un problema contextualizado, cuya estructuración pudiera por sí misma guiarlo a la solución deseada, sin que el docente manifestara alguna intención didáctica durante su desarrollo y, que con la búsqueda de la solución, se generaran nuevos conocimientos matemáticos. El proceso de construcción de los problemas duró varias sesiones en donde los integrantes del seminario y expertos invitados, discutían, analizaban y modificaban continuamente cada versión, de forma tal que se garantizara que la solución del problema implicara necesariamente el uso de los conceptos matemáticos que se esperaban generar. Este proceso continuó hasta que los integrantes del seminario y los expertos consideraron que el problema era adecuado para su aplicación (Ramírez et al, 2008).

La dinámica de trabajo planteada permitió a los integrantes del seminario, cumplir distintos roles en el proceso:

(a) *Como estudiantes universitarios*: en este sentido las investigaciones teóricas sobre Resolución de Problemas, contenidos matemáticos específicos y contenidos

pedagógicos, fueron esenciales para la construcción, revisión y extensión de estos conocimientos por parte de los seminaristas.

(b) *Como estudiantes de secundaria*: constantemente los seminaristas debían ponerse en el papel de los estudiantes de secundaria para poder así analizar los procesos de resolución del problema que se querían llevar al aula. Cada subgrupo de seminaristas redactó una posible solución del problema planteado y la organizó en etapas que contenían la descripción de los posibles procedimientos realizados por los estudiantes de secundaria, los conocimientos previos (recursos) que se debían poseer y las heurísticas que éstos podrían manifestar y las posibles intervenciones del docente. Cada vez que se presentó el problema con sus correcciones a los miembros del seminario y expertos invitados, también se expuso su posible solución con los cambios respectivos, para su discusión y análisis.

(c) *Como profesores en servicio*: se pretendía en este caso evaluar la pertinencia y la utilidad de la propuesta en la generación de los conocimientos matemáticos deseados. Para lograr esto se llevó a cabo la puesta en práctica de la propuesta pedagógica en secundaria, por conveniencia, se utilizaron los grupos que los integrantes del seminario tenían a cargo. Esto les permitió a los seminaristas no quedarse en la teoría, y ponerla en práctica o crear sus propias teorías; extendiendo así sus conocimientos matemáticos y pedagógicos en la acción del aula.

(d) *Como investigadores*: en este sentido, los seminaristas hicieron un análisis de los instrumentos que se utilizaron en la valoración de la propuesta pedagógica en el aula a la luz del marco teórico desarrollado en el seminario. Asimismo, fue fundamental para la creación de los problemas a implementar, el análisis de los distintos componentes teóricos en los estudiantes de secundaria con los cuales se llevó a cabo la experiencia. En efecto, se hizo un estudio sobre los recursos cognitivos que poseían los estudiantes, esto fue fundamental, debido a que fue el punto de partida para resolver el problema, y se analizaron algunas creencias que los estudiantes poseían que eran relevantes en el momento de afrontar los problemas (Ramírez et al, 2008).

5. Elementos a considerar en la construcción de una propuesta metodológica basada en resolución de problemas en la formación de docentes de matemáticas

Las experiencias anteriormente descritas apuntan la necesidad de utilizar la resolución de problemas en un sentido muy distinto al tradicional. En estas últimas

se desarrollan los contenidos matemáticos seguidos por sesiones de resolución de problemas, que, en general, son ejercicios en donde el estudiante debe demostrar que domina los conceptos desarrollados.

En contraste, las experiencias mencionadas evidencian que es posible desarrollar el currículo matemático mediante la resolución de problemas, pero, en este sentido, los nuevos conceptos matemáticos deberían emerger como parte del proceso de resolución. Esto supone claramente un cambio de roles de los estudiantes y profesores de matemáticas, y, por tal razón, la formación de docentes debería responder adecuadamente a esta propuesta metodológica.

En esta dirección, interesa resaltar los elementos medulares de las propuestas de Lesh, *Open-Ended* y el Seminario de Resolución de Problemas desarrollado en la Universidad Nacional, que deberían estar presentes en cualquier propuesta que pretenda desarrollar cursos mediante la resolución de problemas.

En un curso basado en resolución de problemas para la formación de docentes de Matemáticas se rescatan de las experiencias de Lesh y del Seminario de la Universidad Nacional la existencia de dos momentos fundamentales: el desarrollo de conceptos propios de la disciplina matemática y el desarrollo de los conceptos pedagógicos del contenido. En el primer caso, se plantea una serie de situaciones didácticas para que el futuro docente adquiera un concepto (por ejemplo, la derivada de una función real de variable real). En el segundo caso, el futuro docente debe ubicarse en el papel de profesor y llevar a cabo la construcción de las situaciones didácticas necesarias para que sus potenciales estudiantes de secundaria adquieran un concepto dado (por ejemplo, la función exponencial). En este sentido, existen al menos dos situaciones de resolución de problemas a considerar: (1) la solución a situaciones didácticas y (2) la construcción de las mismas.

De esta manera, en la construcción de las situaciones didácticas se proponen los siguientes elementos:

- Es esencial la investigación teórica de los temas que se desean abordar. Por ejemplo, las teorías existentes sobre la resolución de problemas, autores tales como Polya, Schoenfeld, Brousseau, Chevallard, Lesh, Sawada, entre otros. Asimismo, debe hacerse una investigación desde el punto de vista matemático del tema que se piensa abordar, este estudio debe incluir fundamentalmente tres aspectos: la teoría estrictamente matemática de los conceptos a desarrollar, los elementos históricos de dichos conceptos y las aplicaciones en otras disciplinas. Esto le dará al elaborador del problema una visión bastante clara, de forma tal que pueda esbozar las posibles situaciones didácticas para los conceptos que se pretenden enseñar; así estará en mejor posición de determinar si ese concepto del saber matemático es

susceptible a transponerse y convertirse en un saber escolar.

- Igualmente son indispensables ciclos de revisión y discusión durante el proceso de construcción de los problemas para asegurar que éste sea una situación a-didáctica (Brousseau, 1986) y contextualizada, donde los recursos, el control, las heurísticas y creencias de los estudiantes, sean previamente analizadas y el conocimiento sea la estrategia ganadora. Dicho problema debe estimular el desarrollo de modelos conceptuales por parte de los estudiantes que evidencien sus distintas ideas, conocimientos y experiencias sobre los temas abordados. Estos modelos no se deben limitar a simples respuestas como producto de la ejecución de procesos repetitivos y algorítmicos, sino más bien se trata de ofrecer soluciones que involucren justificaciones, conjeturas y análisis de las distintas variables involucradas.

Los elementos descritos anteriormente deberían ser usados por docentes universitarios en la construcción de problemas que sirvan como estrategias metodológicas para sus cursos; y a su vez, éstos deben servir como guía a los futuros (o ya en servicio) docentes de secundaria para la construcción de estas situaciones.

Por otra parte y de forma paralela a lo anterior, para la implementación de las situaciones didácticas construidas es importante tener en cuenta los siguientes elementos:

- Deben existir ciclos de definición, revisión y modificación, durante y después de la actividad, que le permitan al futuro docente enriquecer sus conocimientos y experiencias, lo que a su vez le permitirá interiorizar los conceptos discutidos. El problema planteado debe permitir al futuro docente la revisión y evaluación de sus ideas durante y después del proceso de solución; y exponer, compartir y comparar sus ideas con las ideas de otros compañeros, esto con el sentido de madurar sus conceptos y conjeturas.
- Es necesario que el futuro docente tenga diversas experiencias que enriquezcan su formación como profesional en la Educación Matemática. Pasar por los diferentes papeles (estudiante, profesor, e investigador) sensibiliza al futuro docente sobre los temas a enseñar y las dificultades que sus estudiantes puedan enfrentar en el proceso. De igual manera, los futuros docentes podrán revisar y modificar sus sistemas conceptuales a distintos niveles y con distintos objetivos.
- Es igualmente importante que la acción y dinámica, durante y después de la actividad se base en los resultados y aportes brindados por los futuros

docentes. El rol del docente universitario se reduce a diseñar y orientar la dinámica de la clase; su intervención durante la solución del problema debe ser mínima. Se espera que los futuros docentes hagan uso de sus conocimientos y experiencias previas para la solución del problema y sean ellos mismos los que determinen los pasos a seguir en el proceso.

- Un factor elemental en el proceso de resolución de problemas es el factor tiempo. En las tres experiencias descritas anteriormente (MEAs, *Open-Ended* y Seminario) el factor tiempo fue un determinante importante para el éxito de las actividades de resolución de problemas. Para que el proceso de resolución de problemas sea fructífero, es importante que los futuros docentes tengan a su disposición el tiempo suficiente para que investiguen sobre la naturaleza del problema propuesto; generen y propongan múltiples soluciones; discutan y critiquen los diferentes modelos propuestos; evalúen y comparen otros modelos; y reflexionen sobre lo aprendido.
- El punto anterior nos lleva a pensar en un elemento igualmente importante: la cantidad de situaciones a desarrollar en clase. A diferencia del método tradicional donde listas de problemas son propuestos para su solución en una lección, las experiencias antes descritas basan sus lecciones en la solución y/o elaboración de una o dos situaciones didácticas por lección. Los ciclos de revisión, expresión y extensión de ideas requieren de tiempo y dedicación que la asignación de múltiples problemas podría limitar. Sin embargo, es importante que después de cada sección los futuros docentes busquen o trabajen en problemas relacionados que permitan la internalización y extensión de los conceptos aprendidos.

Los elementos antes presentados resumen los principales aspectos utilizados en el enfoque de MEAs, *Open-Ended* de los japoneses y la metodología del Seminario de Resolución de Problemas la Universidad Nacional. Cabe señalar que los elementos de construcción e implementación de situaciones didácticas propuestos en esta sección no se limitan a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel de formación docente. Éstos podrían adecuarse y servir como guía para la construcción de una propuesta metodológica basada en la resolución de problemas a nivel de primaria y secundaria o en otras disciplinas y carreras. Es posible que los roles que se esperan que los estudiantes experimenten como parte de este proceso sean distintos a los que se quiere que los futuros docentes tengan, pero la idea de diversas experiencias debe persistir

6. Conclusión

En este trabajo se ha presentado el enfoque de Lesh, el Open-Ended de los japoneses y la metodología utilizada en el Seminario de Resolución de Problemas de la Universidad Nacional, como una alternativa para la inclusión de la resolución de problemas dentro de los cursos de las carreras de Enseñanza de las Matemáticas.

Posteriormente, se hizo una integración de los principales elementos presentes en esas experiencias con el propósito de generar insumos que deberían orientar propuestas de formación en Educación Matemática bajo el enfoque de la Resolución de Problemas.

Es importante señalar que bajo este esquema se pueden atender dos aspectos: por un lado el docente universitario puede hacer uso de estos elementos en el planeamiento de sus cursos para la enseñanza de algunos temas matemáticos. Por otro lado, puede plantear este esquema a los futuros docentes para que éstos generen situaciones que les servirá en su quehacer profesional.

Con esto se espera brindar a los futuros docentes de Matemáticas una experiencia en resolución de problemas mediante modelos conceptuales que les permita transformar posteriormente su práctica de aula y con esto generar aprendizajes más efectivos y significativos en el estudiante de secundaria.

Referencias y bibliografía

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemáticas. Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 7, N° 2, 33 – 115.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.

Inprasitha, M. (2009). Extraído el 14 de mayo de 2009 de http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec2006/progress_report/symposium/Imprasitha_a.pdf

Lamon, S. J. (2003). Beyond constructivism: An improved fitness metaphor for the acquisition of mathematical knowledge. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003a). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003b). Foundations of a Models and Modeling Perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. E., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. E. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*. (pp. 591-646). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Lester, F. K., & Hjalmarson, M. (2003). A Models and Modeling Perspective on metacognitive functioning in everyday situations where problem solvers develop mathematical constructs. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Lesh, R., & Yoon, C. (2004). What is distinctive in (Our Views about) Models & Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving Learning and Teaching? En H. Henn, & W. Blue, (Eds.), *ICMI Study 14: Applications and Modeling in Mathematics Education* (pp. 151-160). Dortmund (Germany).

Lesh, R., Zawojewski, J. S., & Carmona, G. (2003). What mathematical abilities are needed for success beyond school in a technology-based age of information? En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Middleton, J. A., Lesh, R., & Heger, M. (2003). Interest, Identity, and Social Functioning: Central Features of Modeling Activity. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Oakes, W., & Rud, A. G. J. (2003). The EPICS Model in Engineering Education: Perspectives on Problem-Solving Abilities Needed for Success Beyond Schools. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Ramírez, C., González, M., Zumbado, M., Arias, A., Espinoza, J., & Espinoza, J. (2008). La Resolución de Problemas en la enseñanza de las Matemáticas: Una experiencia con la función exponencial, polígonos y estadística. Tesis de Licenciatura en la Enseñanza de las Matemáticas, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica.

Sawada, T. (1997). Developing lesson plans. En Becker, J., & Shimada, S. (Eds.), *The Open-Ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sawada, T. (1999). Mathematics as problem solving: A Japanese way. *Teaching Children Mathematics*, v6 n1 p54-58.

Schroeder, T. L., & Lester, F. K., Jr. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. R. Trafton (Ed.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 31-42). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Shimada, S. (1997). The significance of an Open-Ended approach. En Becker, J., & Shimada, S. (Eds.), *The Open-Ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Shternberg, B., & Yerushalmy, M. (2003). Models of functions and models of situations: On the design of modeling-based learning environments. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. En R. Charles & E. Silver (Eds.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving* (pp. 1-22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Zawojewski, J. S., & Lesh, R. A. (2003). A Models and Modeling Perspective on Problem Solving. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

