

CONOCIMIENTOS Y CURRÍCULO EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Ángel Ruiz

Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas,

Universidad de Costa Rica.

<http://cimm.ucr.ac.cr/aruiiz>

angelruizz@racsa.co.cr

Resumen

Se abordan asuntos centrales del currículo para la formación inicial de educadores matemáticos y se propone un modelo de descripción de los distintos componentes cognoscitivos que debe incluir. Se apuntala el papel del conocimiento pedagógico del contenidos matemáticos CPC, y se señalan características tanto de éste CPC como de las matemáticas que específicamente deben poseer estos *currícula*.

Palabras clave

Educación Matemática, *Curriculum*, Enseñanza, Conocimientos.

Abstract

Central issues of the *curriculum* for the initial formation of Mathematics Teachers are tackled and we propose a model for the description of the different knowledge components that it must include. There is propped up the role of the *Pedagogical Content Knowledge* PCK, and characteristics so much of this one PCK as of the Mathematics that specifically must include these *curricula* are proposed.

Keywords

Mathematics Education, *Curriculum*, Teaching, Knowledge.

1. Introducción

Dentro de los principales centros de interés que ha establecido la Educación Matemática en el mundo, se encuentra el tema de los conocimientos que deben poseer el educador matemático, para realizar “efectivamente” su práctica profesional. Las preguntas son varias: ¿Posee un impacto el conocimiento de los educadores en la forma enseñanza? ¿Importa en el aprendizaje de los estudiantes? ¿Cuál tipo de conocimientos es más relevante ya sea para enseñar o para lograr resultados de aprendizaje? ¿Cuál debería ser la organización óptima de los diferentes tipos de conocimiento?

¿Posee un impacto? La formación inicial influencia la forma en la que el educador establece su labor (Fennema y Loef Franke, 1992, p. 148) pero sobre todo la manera de enseñanza. Para la psicología cognitiva, por ejemplo, el conocimiento, en general, influye directamente en el pensamiento de los educadores, y por lo tanto en las acciones que realice en el aula (Brown y Borko, 1992, p. 211), aunque este impacto directo en el aprendizaje no sea, sin embargo, como veremos, tan claro.

Se puede aproximar el problema del currículo en Educación Matemática desde dos ópticas: centrada en los contenidos (especialmente matemáticos), o en situaciones de enseñanza aprendizaje. Los hallazgos en investigación internacional favorecen la segunda perspectiva.

Cuando se asume una óptica curricular basada en los contenidos matemáticos, simplemente, se busca seleccionar y adaptar el currículo de la Enseñanza de las Matemáticas de tal manera que, por ejemplo, un plan de estudios incluya suficientes contenidos en las áreas matemáticas (designadas por los matemáticos como relevantes), y, a la vez, no tenga contenidos en exceso más bien propios de la profesión matemática para la educación superior y la investigación. Normalmente, las experiencias en ese enfoque han apuntado a reducir los contenidos matemáticos en cantidad y profundidad (una profesión con menor “nivel” matemático). En este enfoque su lógica está determinada por las necesidades propias de los matemáticos o por lo que es interpretado así por ellos. Las necesidades pedagógicas se “cubren” con algunos cursos de educación, ya sea de didáctica, currículo, evaluación, o componentes de otras disciplinas conexas (como la psicología). Estos últimos de una naturaleza general y no específicos a la disciplina de las matemáticas. Como desarrollaremos con mayor detalle, la experiencia más generalizada en el mundo ha sido una estructura de conocimientos que unifica dos áreas cognoscitivas: matemáticas y pedagogía. Normalmente, se ha asumido la pedagogía o la didáctica (en la tradición europea continental) como una ciencia un arte general, aplicable a situaciones particulares que generan pedagogías o didácticas “especiales” o específicas. La Educación Matemática es aquí un “matrimonio” entre contenidos matemáticos y

contenidos de esa pedagogía general. Se trata de una yuxtaposición de contenidos, sin intersección o interrelación íntima. Esto se expresa en currículos con cursos de matemática por un lado y curso de pedagogía por el otro. ¿Dónde queda la mediación entre contenidos matemáticos y pedagogía específica para el aula? Se asumía que los contenidos pedagógicos generales proporcionan la base para esa mediación específica. La realidad es, sin embargo, otra.

En algunos países, el énfasis fue colocado en los contenidos matemáticos; en otros el énfasis se dio en los contenidos de educación general. En algunos países se ha favorecido un currículo en el cual la formación matemática se enfatiza por años y se concibe la Educación Matemática como una especialización posterior (España, Francia); en otros, más bien, las matemáticas son un énfasis dentro de un currículo de educación. Esto ha tenido que ver con los lugares institucionales en los cuales la Educación Matemática se desarrollaba (en Escuelas de Matemática o en Facultades de Educación). En muchos casos, sin embargo, la separación entre matemática y educación y otros componentes ha sido la regla durante muchos años. Pedagogía impartida por especialistas en educación, en general, sin conocimiento de las matemáticas. Y matemáticas aportadas por profesores de matemáticas (aunque no necesariamente matemáticos profesionales activos), sin conocimiento de la pedagogía.

Como afirman Ruiz, Chavarría y Alpízar (2003):

Durante décadas y décadas hasta ahora en todo el mundo han predominado programas de formación de profesores de matemáticas que han sido en esencia “embutidos” de pedagogía general y matemáticas (la mayoría de las veces de bajo nivel). Una yuxtaposición pobre e inútil para propiciar el progreso de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Los profesores de matemáticas formados en esas condiciones terminan al egresarse de las universidades dependiendo de sus virtudes y debilidades solamente para su labor, sin poder fundamentar sus actividades profesionales en métodos y conceptos y recursos proporcionados por su disciplina en las aulas universitarias. A las dificultades propias de la naturaleza de las matemáticas para su aprendizaje, se añaden las derivadas de una separación drástica entre pedagogía y matemáticas. La construcción de la disciplina académica permitirá avanzar en la definición de un perfil profesional propio, una especialidad capaz de seguir progresando. La investigación en este escenario, ahora y como ejemplo, es posible de concebirse como un proceso permanente incorporado, como dijimos antes, en los quehaceres de la profesión, en el aula misma.

Vamos a buscar, en lo que sigue, una respuesta teórica a los problemas planteados en la anterior cita.

2. Conocimiento pedagógico del contenido y currículo

Desde hace más de 20 años, las principales investigaciones apuntan a una reconstrucción de los *currícula* en la enseñanza de las matemáticas que supere la perniciosa dicotomía y separación entre contenido matemático y contenido pedagógico.

Esta separación entre contenido disciplinar y pedagogía no ha sido exclusiva de las matemáticas: química historia, lenguaje, etcétera, han visto las dificultades de esta dicotomía. Por eso mismo, vamos a reseñar alguno de los planteamientos generales más significativos que se han dado en el contexto internacional.

El norteamericano Lee Shulman (1986) afirmaba que el “paradigma escondido” en la formación ha sido precisamente el “conocimiento pedagógico del contenido” CPC, en inglés *Pedagogical Content Knowledge*. Este va más allá del conocimiento de la disciplina en sí mismo y señala al conocimiento de la disciplina para la enseñanza. No se trata de una conjunción de pedagogía y contenido, ni una intersección de ambas. Según este psicólogo norteamericano, dentro de esta categoría debe incluirse, en relación con los tópicos que se enseñan con mayor regularidad en una materia, las formas y representaciones más útiles del concepto o procedimiento, las analogías más poderosas, ilustraciones, ejemplos explicaciones y demostraciones. El lo resume diciendo CPC son:

Las vías de representación y formulación de la materia que la hacen comprensibles a los otros. El conocimiento pedagógico del contenido también incluye el entendimiento de lo que hace algo fácil o difícil en el aprendizaje de tópicos específicos, es decir concepciones y preconcepciones que los estudiantes de la diferentes edades y contextos incorporan en el aprendizaje de los tópicos más frecuentemente enseñados y en las lecciones más frecuentemente enseñadas. Cuando estas preconcepciones son equivocadas, lo que es usual, los educadores necesitan conocimiento de las estrategias que pueden resultar más fructíferas para reorganizar el entendimiento de los estudiantes, puesto que es poco probable que estos estudiantes participen en el proceso educativo como una tabla rasa (Shulman, 1986, p. 9).

Es decir, las dimensiones cognitivas que participan en el acto de enseñanza aprendizaje son irrelevantes y poseen un estatuto propio dentro del conocimiento que debe tener el educador.

Shulman y Quinlan (1996) insisten:

La capacidad para enseñar, sin embargo, no está compuesta de un genérico conjunto de habilidades pedagógicas; en su lugar, la efectividad de la enseñanza es altamente dependiente conjuntamente del *conocimiento del contenido* y del *conocimiento didáctico del contenido*, en cómo una buena comprensión de la materia

y en cómo una buena comprensión de los modos de transformar los contenidos de materia en representaciones con potencialidad didáctica (p. 409).

¿Cuál es la esencia intelectual de esta aproximación? El conocimiento de la disciplina no genera por sí mismo los mecanismos para la enseñanza de los contenidos en particular a alumnos específicos.

Este conocimiento se construye con y sobre conocimiento de la disciplina, el conocimiento teórico general y el conocimiento de los alumnos.

Según Gudmundsdottir (1990): “es la parte más importante del conocimiento base de la enseñanza y distingue al profesor veterano del novel, y al buen profesor del erudito”.

¿Cómo se construye este conocimiento pedagógico del contenido? ¿Es una derivación del contenido? Bolívar (2005) acude a los términos de Marks (1990) para señalar algunas vías, interpretación, especificación y síntesis de la siguiente manera:

- se puede considerar que algunas dimensiones pedagógicas del contenido se siguen directamente del contenido matemático (“interpretación”);
- Otras dimensiones pueden derivarse de conocimientos pedagógicos generales (“especificación”);
- Otras dimensiones no se derivarían necesariamente ni del contenido disciplinar ni del pedagógico ni de otro conocimiento pedagógico del contenido anterior (“síntesis”), pueden ser todos ellos en alguna proporción.

Debe hacerse el CPC, entonces, en esa categoría de construcciones pedagógicas que no son implicaciones de contenidos disciplinares o de pedagogía general, sino de la situaciones específicas a la enseñanza aprendizaje de una materia.

También, con Grossman (1989) y Marks (1990), citados por Bolívar (2005), se pueden señalar otros componentes posibles del CPC:

1. Conocimiento de la comprensión de los alumnos: modo cómo los alumnos comprenden un tópico disciplinar, sus posibles malentendidos y grado de dificultad;
2. Conocimiento de los materiales curriculares y medios de enseñanza en relación con los contenidos y alumnos;
3. Estrategias didácticas y procesos instructivos: representaciones para la enseñanza de tópicos particulares y posibles actividades/tareas; y
4. Conocimiento de los propósitos o fines de la enseñanza de la materia: concepciones de lo que significa enseñar un determinado tema (ideas relevantes, prerrequisitos, justificación, etc.).

Con Ruiz, Barrantes y Gamboa (2009):

El conocimiento pedagógico del contenido implica una reorganización y transformación de los contenidos disciplinares que debe tener en cuenta el contexto, el currículo y los estudiantes. Apunta directamente hacia elaboraciones y construcciones sobre la enseñanza de un tópico específico y representaciones múltiples del mismo, así como sus propósitos didácticos. Incorpora también los mecanismos de pensamiento y razonamiento que pueden resultar fructíferos para el objetivo pedagógico. También incorpora los valores, creencias, concepciones que participan en la práctica de enseñanza aprendizaje en un nivel determinado.

¿Es el conocimiento pedagógico del contenido un subconjunto de la disciplina o es algo más? Es decir, una vez reconocidos la existencia y el lugar del CPC, se plantea si ésta es una derivación exclusiva del contenido. En el caso de las matemáticas, ¿definen y determinan éstas su CPC? Concordamos con Hashweh (2005):

El conocimiento didáctico del contenido es el conjunto o repertorio de “construcciones pedagógicas”, resultado de la sabiduría de la práctica docente, normalmente con una estructura narrativa, referidas a tópicos específicos. De este modo no sería ni una subcategoría del conocimiento de la materia (conocimiento de la materia para la enseñanza) ni una forma genérica de conocimiento, sino una colección de “construcciones didácticas”, específicas para cada tópico, que puede ser examinada en los diversos componentes que la configuran (conocimiento curricular, del contenido, creencias sobre la enseñanza-aprendizaje, conocimientos y creencias didácticas, conocimientos del contexto y recursos, metas y objetivos) (reseñado por Bolívar, 2005).

Cabe preguntarse también si el CPC se reduce a los conocimientos que merecen la comprensión de la cognición o el aprendizaje e individual de los sujetos. En nuestra opinión el conocimiento pedagógico del contenido o la pedagogía específica no pueden reducirse a la psicología del aprendizaje al margen de los contextos e influencias sociales que forman parte del hecho educativo.

En resumen, se asume en esta perspectiva que la pedagogía (o la didáctica, en la acepción europea continental), vista como conjunto de principios genéricos que se pueden aplicar a cualquier disciplina, es algo diferente de una pedagogía específica. La existencia de una pedagogía específica tiene sentido epistemológico a partir de la existencia del conocimiento de la disciplina específicamente pedagógico. Puesto en otros términos: la didáctica específica no se considera simplemente una aplicación de los principios de la pedagogía general, sino que refiere a los métodos específicos de la disciplina y las circunstancias precisas en que se realiza la formación en la misma.

¿Cómo se deben integrar en el currículo (en la misma malla curricular) el conocimiento disciplinar, el conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento pedagógico general? Las investigaciones sugieren que, puesto que estos tres com-

ponentes se superponen y poseen intersecciones en la práctica, entonces: "... los centros de formación del profesorado no deberían impartirlos en cursos independientes (cursos disciplinares y métodos didácticos por otro)" (Bolívar, 2005, pp. 25-26). No obstante, podríamos pensar que de lo que se trata es de establecer una estrategia que involucre CPC y una enseñanza de los contenidos matemáticos de manera específica para el educador. Volveremos sobre este tema.

3. Conocimientos en la formación del educador matemático: propuesta de un modelo teórico

El diseño y arquitectura precisos de un currículo debe obedecer a varios factores contextuales e históricos aparte de los teóricos y epistemológicos. No es el propósito de nuestro trabajo ofrecer un mayor nivel de precisión. Con base en las anteriores consideraciones, sin embargo, vamos a referirnos con mayor detalle a la estructura de conocimientos para el educador matemático.

Shulman (1987) señala varios tipos de conocimiento que debe poseer un educador:

Si hubiera que organizar los conocimientos del profesor en un manual, en una enciclopedia o en algún otro tipo de formato para ordenar el saber, ¿cuáles serían los encabezamientos de cada categoría? Como mínimo incluirían:

- *Conocimiento del contenido;*
- *Conocimiento didáctico general,* teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura;
- *Conocimiento del currículo,* con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como "herramientas para el oficio" del docente;
- *Conocimiento didáctico del contenido:* esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional;
- *Conocimiento de los alumnos* y de sus características;
- *Conocimiento de los contextos educativos,* que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas; y
- *Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos.*

Entre estas categorías, el conocimiento didáctico del contenido adquiere particular interés porque identifica los cuerpos de conocimientos distintivos para la enseñanza. Representa la mezcla entre materia y didáctica por la que se llega

a una comprensión de cómo determinados temas y problemas se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses y capacidades de los alumnos, y se exponen para su enseñanza (pp. 10-11)

Shulman no buscaba ser exhaustivo. No obstante, apuntó algunas de las principales categorías que vamos a considerar aquí dirigidas hacia las matemáticas.

El nuevo contexto apunta a una disciplina y ciencia social que parte de los conceptos y métodos matemáticos (que nutren y establecen las fronteras cognoscitivas en las que se trabaja), realiza una “transposición didáctica” (una conversión de los mismos en objetos educativos para la enseñanza y aprendizaje), y coloca sus objetivos colectivos en aprendizajes dentro de entornos sociales. Invoca matemáticas teóricas (que proporcionan objetos y métodos específicos), matemáticas para la enseñanza (matemáticas que han tenido un proceso de transposición didáctica), conocimientos de historia, filosofía, antropología y otras ciencias sobre las matemáticas, didáctica o pedagogía específica (asociada a las matemáticas), conocimiento de los aprendizajes matemáticos (cognitivo, social), y conocimiento de los procesos educativo generales (pedagogía, sociología). Existen otros conocimientos que se deben incorporar en la formación de un educador matemático que apelan a su formación integral, como las bellas artes y las llamadas “humanidades” o técnicas (como las TICs), las lenguas modernas (aquí daremos énfasis a aquellos componentes directamente aplicados en la profesión).

Podemos integrar estos conocimientos en un modelo formado por esos elementos cognoscitivos de la siguiente manera:

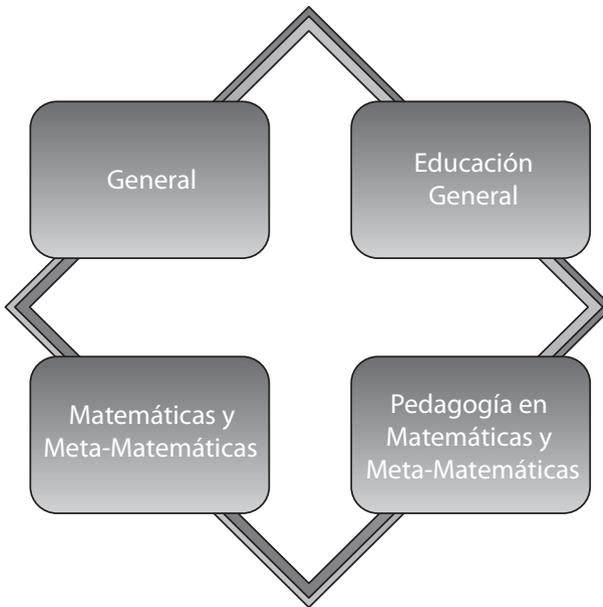
Tabla 1. Estructura de conocimientos en la formación inicial del educador matemático

Categoría	Subcategorías	Descripción
1. Conocimiento general		Aquel que no refiere a los procesos educativos pero que es relevante en la formación integral del educador y de todo profesional: estudios que sostienen una perspectiva humanista en la formación, conocimientos instrumentales (lenguajes y paquetes informáticos, etc.), otras lenguas.

2. Conocimiento matemático y meta-matemático	Conocimiento matemático	Las matemáticas que el educador necesita, una forma de matemática aplicada (subconjunto de las matemáticas, aunque no un subconjunto de las matemáticas para el matemático, del ingeniero, u otros): representaciones de conceptos y soluciones múltiples, útiles para construir situaciones problemas, generadoras de pensamiento matemático, interrelaciones teóricas dentro de las matemáticas, representación por medio de modelos y aplicaciones, etc.
	Conocimiento meta-matemático	Los conocimientos sobre las matemáticas desde diferentes enfoques disciplinarios: historia, filosofía, estudios sociales de las matemáticas. No es toda la metamatemática sino aquella de interés para el educador (subconjunto de las metamatemáticas).
3. Conocimiento educativo general	Conocimiento pedagógico general	Refiere a los diferentes aspectos que participan directamente en la enseñanza y aprendizaje: currículo, evaluación, didáctica, psicología del aprendizaje y la enseñanza, cognición, sociología educativa.
	Conocimiento educativo general no pedagógico.	Intervienen en la educación pero no necesariamente para la acción pedagógica directa: normativas institucionales, sociología y antropología de grupos, etc.
4. Conocimiento pedagógico de las matemáticas y las metamatemáticas.	Conocimiento pedagógico matemático	Refiere a las representaciones múltiples y mediaciones pedagógicas específicas de los contenidos matemáticos. En dos dimensiones generales: relativas a los estudiantes; relativas a la enseñanza.
	Conocimiento pedagógico metamatemático	Dimensiones pedagógicas de las metamatemáticas: conceptos y métodos cómo intervienen o se pueden usar historia, epistemología, antropología, etc. en el aula.
Modelo elaborado por A. Ruiz.		

Se puede representar gráficamente como aparece en la figura 1.

Figura 1. Estructura de conocimientos en la formación inicial del educador matemático.



Veamos con mayor detalle algunas de estas categorías.

Conocimiento educativo general

El conocimiento educativo general refiere a aquellos principios y situaciones generales de enseñanza y aprendizaje, principios curriculares y de evaluación, psicología de niños y adolescentes, dinámica de grupos, liderazgo colectivo, reglamentación institucional, influjos socioculturales en la educación presentes en la práctica educativa, etc.

Con Ruiz, Barrantes y Gamboa (2009):

La investigación revela que este componente general no posee un impacto tan fuerte en el éxito del aprendizaje específico de la matemática en el aula. Sí es importante, no obstante, porque existen dimensiones no relativas directamente a las matemáticas que intervienen en la práctica profesional dentro y fuera del aula: entre otras, vida institucional, interrelación con profesionales de otras disciplinas, conductas (psicología y sociología) de grupos o individuos, problemas generales de aprendizaje (discapacidades, por ejemplo), visiones y creencias sobre la educación y la vida que

intervienen (filosofías), factores culturales generales (asociados a etnia, género, clase social, etc.), valores éticos, actitudes, legislación, etc. Es un componente general que apoya las perspectivas más amplias de la profesión del educador.

El problema que ha existido en muchas partes en el currículo del educador matemático, es que ha incorporado sólo dos componentes: matemáticas y ciencias sociales de la educación. Incluso, en algunos países, se llegó a asumir que la transposición didáctica de las matemáticas a las “matemáticas para la enseñanza” debía ser realizada por el mismo educador dotado solamente de esos componentes. Esto era simplemente absurdo. Lo que hoy se subraya como crucial es la incorporación de las dimensiones específicas en la pedagogía y el aprendizaje de las matemáticas.

La presencia de matemáticas y conocimiento educativo general no encierra ningún secreto especial. Una situación diferente ocurre con la pedagogía matemática.

Además, resulta de interés mencionar que no hay evidencia de que el conocimiento de teorías generales del aprendizaje (ya sea behaviorismo o constructivismo) impacten las decisiones de los educadores en su labor de aula (Fennema y Loef Franke, 1992, p. 153). O sea, su incorporación no posee un influjo directo para la práctica docente (lo cual no quiere decir, por supuesto, que no haya que incorporarlas en el currículo).

Sí hay evidencia de un mayor impacto en la acción del docente del conocimiento de las condiciones cognitivas en las que se realiza el aprendizaje, es decir, de los procesos mentales a través de los cuales el estudiante aprende de manera específica los conceptos matemáticos (diversidad de estrategias, estructura de pasos cognitivos, obstáculos didácticos).

Por las razones señaladas arriba, no vamos en este trabajo a dar un detalle mayor al conocimiento educativo general.

Conocimiento pedagógico de las matemáticas y las meta-matemáticas

Ya hemos mencionado que un fuerte impacto sobre la práctica profesional y, por ende, en la enseñanza y el aprendizaje posee, según los hallazgos de la investigación, el conocimiento pedagógico de los diferentes tópicos de las matemáticas que se deben enseñar. Es decir, el conocimiento de las técnicas, principios, organización de situaciones y recursos en general para enseñar en el aula aquellas partes de las matemáticas que posee el currículo escolar. No se trata solamente de adquisición de técnicas (procedimientos) sino de conocimiento de todos los aspectos que se encuentran en los procesos de enseñanza aprendizaje de cada tópico matemático: orígenes cognoscitivos e históricos en las matemáticas, significado y perspectiva matemática de los conceptos o métodos a enseñar, estudio de los procedimientos de

enseñanza posibles y una jerarquización de los mismos en función del aprendizaje, organización de la clase para el objetivo específico, estudio de dificultades u obstáculos didácticos, etc. Se debe ver como una integración interactiva entre matemática y pedagogía orientada con precisión hacia el nivel educativo y a los contenidos matemáticos que se deben enseñar.

Podemos colocar algunas subcategorías bajo el conocimiento pedagógico del contenido:

- Teorías del aprendizaje matemático.
- Cognición y matemáticas.
- Creencias en matemáticas.
- Currículo matemático.
- Didácticas y gestión de las matemáticas.
- Evaluación matemática.
- Investigación en Educación Matemática.

La lista, por supuesto, no es exhaustiva y, también, se pueden reagrupar las subcategorías, pero, con la estructura presentada, ya hemos dibujado la perspectiva teórica que pensamos puede sostener un currículo en la Educación Matemática.

¿Cómo se perfilaría mejor este conocimiento pedagógico de las matemáticas? Ofrecemos en lo que sigue algunas pinceladas de lo que pueden ser estas subcategorías cognoscitivas con propósitos de ilustración.

Teorías del aprendizaje matemático. El educador matemático debe conocer las epistemologías de la Educación Matemática: constructivismo, socioculturalismo, interaccionismo, etc., las teorías educativas de la construcción de conocimiento matemático y mediaciones prácticas en la acción de aula. ¿Cómo se construye una estrategia didáctica en las matemáticas de acuerdo a las diferentes perspectivas epistemológicas?

Didácticas y gestión de las matemáticas. Producto precisamente de la mayor conciencia del lugar del conocimiento pedagógico del contenido, en las últimas décadas se ha dado una amplia generación de resultados sobre cómo enseñar los contenidos matemáticos en los diferentes niveles educativos. Ya sea que se acuda al recurso de contextualizar en entornos sociales y físicos, al uso de manipulables, al uso de la historia, los juegos de contenido matemático, los desafíos o las tecnologías digitales modernas, se empuja a la utilización de múltiples instrumentos para apoyar el aprendizaje. Es decir: potenciación de las didácticas matemáticas. En esto se pueden señalar dos posible aspectos: por un lado, las didácticas asociadas a cada disciplina de las matemáticas:

- Didáctica del álgebra.
- Didáctica de la geometría.
- Didáctica del análisis (de funciones, cálculo, etc.)
- Didáctica de la aritmética y la teoría de números.
- Didáctica de la estadística y las probabilidades.

En cada caso, se trata de invocar múltiples representaciones de los conceptos o procedimientos de cada una, diversas estrategias de enseñanza (adaptadas a cada una), contextos de aplicación, perspectivas generales en cada disciplina. En todo momento: se debe abordar la didáctica desde las competencias asociadas que establece el currículo escolar y buscar los mejores mecanismos para desarrollarlas en cada caso.

Por el otro lado, se encuentran temas transversales (presentes en todas las disciplinas y en el currículo matemático): uso de la historia, de las tecnologías, de la investigación, etc.

La didáctica que utiliza como medio la historia de las matemáticas, por ejemplo, es un conocimiento distinto de la historia de las matemáticas específicamente. Invoca estrategias y procedimientos pedagógicos de una mera particular.

Didáctica general de la gestión del aprendizaje de las matemáticas en el aula.

Esto último refiere a las características de la acción docente en el aula: organización de las etapas (inicio, cierre, siguiente lección), las instrucciones y las actitudes docentes (el nivel de la participación del estudiante, por ejemplo), las tareas escolares, la escogencia de los instrumentos pedagógicos, que pueden usar, entre otros, marcos teóricos provenientes de la resolución de problemas, la teoría de las situaciones didácticas, la fenomenología didáctica, etc.

Son relevantes las experiencias internacionales en la labor de aula; ¿qué resultados aportan que pueden ser útiles para el educador? Estudios comparativos de aula son importantes de conocer. Por ejemplo, los ya clásicos de Stigler y Hiebert (1999) o los más recientes de Clarke, Emanuelsson, Jablonka, y Mok (2006), y Clarke, Keitel y Shimizu (2006).

Cognición y matemáticas. Los resultados de investigación evidencian que las dimensiones específicas del qué y cómo enseñar matemática son las cruciales; lo mismo sucede con los conocimientos sobre el aprendizaje. De hecho, los estudios realizados con la influencia de la psicología educativa cognitiva (donde pesa el constructivismo), el socioculturalismo y la misma resolución de problemas, todos interesados en el aprendizaje, potenciaron lo que se suele llamar las ciencias cognoscitivas (“cognitive science”). Este último es un nuevo campo interdisciplina-

rio que, desde finales de los años 50, incluye antropología, inteligencia artificial, psicología cognitiva, computación, educación, lingüística y filosofía (Schoenfeld, 2000). Con nuevos instrumentos de experimentación, metodologías y formas de postular las diversas teorías se abrieron interesantes y novedosas posibilidades de experimentar sobre el estudio del pensamiento y resultados muy relevantes sobre el papel de los contextos culturales y sociales en el aprendizaje (Bransford et al, 2000, p. 8). Este importante campo de investigación hoy incluye todos los aspectos sobre la formación de conceptos matemáticos, las conductas y estrategias en la resolución de problemas, los esquemas cognitivos, la construcción de sentido o significado, las características efectivas y actitudinales en relación con los estudiantes.

La cognición y el aprendizaje de las matemáticas es el tipo de investigación predominante en la Educación Matemática (Niss, 2000). Este tipo de estudios y sus conclusiones deberían nutrir con fuerza el currículo de la enseñanza de las matemáticas en las universidades.

Ahora bien, no solo debe incorporarse aquí el conocimiento de los aprendizajes con base en la óptica de la psicología cognitiva, que se centra mucho en el individuo y su devenir interno, sino, también, conocimiento sobre los influjos culturales y sociales, las instituciones, la familia, etc. y sobre las conductas colectivas que impactan en el aprendizaje: la interacción interpersonal, lo cooperativo, la dinámica colectiva de los procesos de aprendizaje, las negociaciones y los “contratos didácticos” en el aula (explícitos o implícitos), las características de la transmisión de significados en la clase, las modificaciones cognoscitivas por la influencia de los otros en el individuo y viceversa.

En el currículo del educador matemático debería ingresar, por ejemplo, el análisis de los procedimientos mentales presentes en los procesos educativos relacionados con las matemáticas, tanto por parte de los estudiantes como de los profesores (por ejemplo, las actitudes tipo “efecto Topacio” o “efecto Jourdain” que ha señalado Brousseau, o la “constante macabra” de Antibí). Descripción, significados y utilización pedagógica de los errores y las dificultades en las matemáticas. Procesos mentales específicos en la resolución de problemas: por ejemplo, metacognición (control).

Creencias en matemáticas. Los resultados sobre las creencias, un componente importante en los trabajos sobre resolución de problemas, tanto de los estudiantes como de los educadores, es un tema que debería incluirse en el armamento teórico que reciben los educadores en formación. Lo que piense un estudiante condiciona múltiplemente su actitud hacia la instrucción matemática que recibe. Y las creencias de los educadores juegan un papel crucial en el tipo de lección que éstos desarrollen y, por ende, en lo que los estudiantes vayan a aprender (Fennema y Loef Franke, 1992, p. 157).

El currículo posee responsabilidad en la potenciación de ideas erróneas o apropiadas que el educador va a reproducir en el aula y el asunto debe abordarse en la formación inicial de manera directa. Un ejemplo: varias investigaciones señalan que las creencias “robustas” en el educador matemático en formación son difíciles de transformar (Pp’t Eynde, de Corte y Verschaffel, 2001), pero hay resultados que muestran cómo se logran cambiar percepciones de estos profesores acerca de la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza; por ejemplo: transformación de una visión que enfatiza formalismo y pensamiento algorítmico hacia otra que afirma los aspectos constructivos y de proceso en la matemática y su enseñanza –por medio de un énfasis en la resolución de problemas (Liljedahl, Rolka y Rösken, 2007).

Currículo matemático. Los objetivos de las matemáticas en el nivel educativo meta: en el caso que favorecemos, la educación media preuniversitaria. ¿Cuáles son las condiciones, medios, contextos y límites de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas en estos niveles escolares? Precisamente, sería pertinente la temática de los significados de las competencias (Niss, PISA), habilidades y destrezas matemáticas (*National Research Council de los EUA*), estándares (*National Council of Teachers of Mathematics* de los EUA) en la organización, definición y realización práctica de un currículo en matemáticas.

El educador matemático requiere conocimiento de cuáles son las razones y las condiciones de la incorporación de los conocimientos matemáticos que deben estar presentes en la matemática escolar. En ese sentido, un tema importante son las adaptaciones del currículo matemático a contextos socioculturales y a condiciones específicas de enseñanza aprendizaje. El progreso y cambio en los currículos: ¿cómo mejorar las competencias matemáticas de los estudiantes? No puede faltar la perspectiva internacional: currículos matemáticos en diversas partes del mundo, sus comparaciones.

Evaluación matemática. El educador matemático en formación debe recibir conocimiento sobre las relaciones entre metodología de enseñanza en matemáticas y los procesos de evaluación específicos. Parámetros y procedimientos de evaluación específicos a las matemáticas; por ejemplo en torno a la resolución de problemas, a la evaluación de las competencias de argumentación y comunicación matemáticas, modelización matemática, etc. Otro tema crucial: las estrategias que permitan la evaluación adecuada de la comprensión de conceptos así como de los procedimientos algorítmicos en matemáticas. Diseño de tareas (task design) para el desarrollo de la lección y mecanismos de evaluación. Conocimiento y significados de las pruebas estandarizadas en los procesos de aprendizaje. Instrumentos evaluativos de diagnóstico para el apoyo educativo en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Pruebas comparativas internacionales en matemáticas: PISA, TIMSS, etc.: premisas teóricas, métodos, análisis y utilización de resultados en el mejoramiento del sistema educativo y la acción de aula.

Formación continua e investigación en Educación Matemática. El educador matemático debe recibir en su formación inicial instrucción sobre los principales métodos que se utilizan en la investigación en la Educación Matemática: cualitativa, cuantitativa, de casos, etc. A la vez debe adquirir conocimiento y competencias para realizar investigación de aula en su práctica profesional con el propósito, en particular, de mejorar su enseñanza y profundizar los niveles de aprendizaje.

Un educador debe recibir en su formación inicial conocimiento sobre los hallazgos en la Educación Matemática internacional sobre formación continua e investigación. Por ejemplo, las características y métodos de la “lección estudio” en Japón, que integra, entre otras cosas, investigación de aula, formación continua y desarrollo profesional.

Por otra parte, el educador requiere conocer cómo puede usar la historia de las matemáticas en el aula, las reflexiones filosóficas deben jugar un papel específico en el desarrollo de la labor profesional, los resultados de estudios sociales o en general meta-matemáticos ocupan un espacio propio que lo hemos consignado dentro de esta gran categoría.

Conocimiento matemático y meta-matemático

Como consignan Ruiz, Barrantes y Gamboa (2009):

Los *Conocimientos matemáticos* son los contenidos y métodos de las matemáticas y los *Conocimientos meta-matemáticos* deben entenderse aquí como conocimientos filosóficos, históricos, sociológicos sobre las matemáticas. Es decir contenidos de y sobre la disciplina:

- Conceptos y procedimientos;
- métodos de construcción, validación y comunicación;
- estructuras cognoscitivas;
- aplicaciones;
- historia, filosofía y estudios sociales de las matemáticas.

El dominio cuantitativo y cualitativo de conocimientos matemáticos se ha demostrado ofrece, entre otras cosas, mayores opciones para la enseñanza en el aula, así como mayor seguridad y confianza del docente en su labor (impacto en la situación del educador) (Brown y Borko, 1992, p. 220), aunque conviene precisar esta valoración.

Bass (2005) llega a decir incluso que la Educación Matemática en su conjunto es una matemática aplicada:

La Educación Matemática no es Matemática. Es un dominio de trabajo profesional

que hace un uso fundamental altamente especializadas formas de conocimiento matemático y en ese sentido puede ser, sugiero, útilmente vista como una especie de matemática aplicada. Voy a argumentar que, como sucede en otros dominios de las “matemáticas aplicadas”, la primera tarea del matemático que quiere contribuir en esta área es entender sensiblemente el dominio de aplicación, la naturaleza de sus problemas matemáticos, y las formas de conocimiento matemático que son útiles y usables en este dominio (p. 416).

El punto de fondo aquí es la conceptualización de la forma particular de matemática que requiere el educador matemático (que exige ser a su vez enseñada de forma específica: muy ejemplarizante) y las características que debe tener. Es decir, el significado preciso de la “aplicación”. Para Bass (2005): “El conocimiento necesario para la enseñanza debe ser usable para la resolución de problemas especializadas y el razonamiento que los maestros tienen que hacer”.

En el caso de la primaria, en efecto, Heather Hill, Deborah Ball y Hyman Bass han desarrollado un importante proyecto en esa perspectiva (*Learning Mathematics for Teaching Project*). Ellos han propuesto un modelo con 4 categorías:

(1) *Conocimiento matemático común* (que se espera sea conocido por cualquier adulto educado), (2) *Conocimiento matemático especializado* (estrictamente conocimiento matemático que es particular para el trabajo de enseñanza, aunque no requerido o conocido en otras profesiones que usan intensamente las matemáticas (incluyendo la investigación matemática), (3) *Conocimiento de matemáticas y estudiantes* y (4) *Conocimiento de matemáticas y enseñanza* (Bass, 2005, p. 429).

El conocimiento matemático especializado no debe verse como un “subconjunto” de lo que otros profesionales incluso matemáticos deben saber.

El conocimiento matemático aplicado a la educación supone contenidos matemáticos propiamente pero ligados a objetivos en la acción educativa.

Podemos invocar aquí una relación con la “transposición didáctica” desarrollada por Chevallard, donde el “saber sabio” sufre una serie de modificaciones para convertirse primeramente en “saber a enseñar” y luego en “saber enseñado”. El primer paso desde el “saber sabio” en la transposición didáctica genera la determinación de los contenidos que deben formar parte del currículo escolar; el segundo paso transforma este último “saber a enseñar” en un objeto de enseñanza. Esto se desarrolla en un contexto institucional, en este caso las unidades educativas. Por eso, este autor subraya que la transposición didáctica debe verse como un proceso institucional, una “antropología, que invoca aquellas entidades que produce en el “saber sabio” y aquellas que lo reciben con el propósito de realizar una transposición didáctica. La escogencia de los contenidos a enseñar es una forma de aplicación matemática en la educación, y una vez que se convierten esos

contenidos en objetos de enseñanza se invoca conocimientos pedagógicos de los mismos. Ahora bien, la teoría establece el “saber enseñar” y el “saber enseñado” en función del “saber sabio”. Este último es la principal referencia. Las implicaciones aquí son claras: las matemáticas determinan plenamente los objetos de enseñanza. Esta visión es concordante con las ideas de Brousseau, que colocan la “didáctica de las matemáticas” dentro de la práctica matemática propiamente, por diversas razones (Ruiz, 2003). Esta teoría de la transposición didáctica subraya los contenidos en la enseñanza y aprendizaje y no precisamente los procesos de la enseñanza aprendizaje que se encuentran al margen de los contenidos; se subraya la disciplina como fuente de una pedagogía específica, la transposición didáctica enfoca su interés en las dimensiones más amplias institucionales, sociales. La estructura de momentos que establece la transposición son válidos de manera general, no obstante la clave en todo esto es cuáles son las matemáticas y sus procesos pedagógicos asociados.

Todo apunta a la construcción de currículos con una fuerte participación de pedagogías específicas de las matemáticas, donde las competencias profesionales claramente establecidas pueden ser útiles. Esto supone cursos específicos de pedagogía matemática, y a la vez propósitos pedagógicos matemáticos específicos en todo el currículo.

Los Conocimientos matemáticos son los contenidos y métodos de las matemáticas y los Conocimientos meta-matemáticos deben entenderse aquí como conocimientos filosóficos, históricos, sociológicos sobre las matemáticas. Es decir contenidos de y sobre la disciplina:

- Conceptos y procedimientos;
- métodos de construcción, validación y comunicación;
- estructuras cognoscitivas;
- aplicaciones;
- historia, filosofía y estudios sociales de las matemáticas.

4. Las matemáticas “aplicadas” en la formación inicial del profesional en Educación Matemática

¿Pueden ser concebidas las matemáticas para el educador matemático al margen de las consideraciones pedagógicas generales? La respuesta es negativa. Estos conocimientos no pueden ser establecidos al margen de la pedagogía específica, tiene que existir un vínculo *explícito*. De las cosas que más influyen en

la formación de un estudiante de enseñanza de las matemáticas es la forma en que recibe los cursos de matemática. Es posible enseñar en cursos de pedagogía matemática y cómo deben enseñarse los contenidos matemáticos, pero solo eso, incluso, resultaría insuficiente.

Hace relativamente poco tiempo, en el 2004, en la conferencia vigésimo octava del *International Group for the Psychology of Mathematics Education PME*, un foro se dedicó exclusivamente a la temática del conocimiento matemático del educador matemático para la educación media. Nos parece pertinente retrotraer algunas de las conclusiones:

- Es necesario conocer matemáticas con un cierto nivel de competencia.
- Adicionalmente a enseñar matemáticas hay una necesidad de adquirir un conocimiento “diferente” de las matemáticas.
- Cuál es ese conocimiento diferente, es algo que no está claro.
- En algunos casos, se propone que ese conocimiento sea: la matemática escolar con ideas relevantes como las funciones; en otras ocasiones, ese conocimiento es visto simplemente como algo diferente de las matemáticas del matemático profesional.
- Se ha obtenido progreso en el conocimiento de las concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas, pero falta ver cómo se transfiere ese conocimiento dentro del conocimiento del educador para enseñar.
- En la preparación de educadores matemáticos existe todavía una desconexión entre lo que los estudiantes experimentan como matemáticas y su enseñanza en los cursos formales de matemáticas y lo que son los cursos de Educación Matemática (Doerr y Wood, 2004, p. 189).

En ese foro, Borba (Brasil) y Even (Israel) consignaron su experiencia nacional afirmando que más contenidos matemáticos o más competencia matemática no son la solución para lograr progreso en la Educación Matemática.

Supuestos erróneos.

Una forma de analizar este asunto nos parece puede hacerse a través de opiniones comunes en los medios de formación de educadores (aunque con diferencia entre países):

1. Que el conocimiento de las matemáticas asegura las competencias para la enseñanza de esta disciplina en el la secundaria.
2. Mayor conocimiento de matemáticas (más contenidos) mejora por sí mismo las competencias del educador matemático.
3. Los contenidos de un curso de matemática para la formación docente deben establecerse solamente con base en las conexiones matemáticas que posean esos contenidos (su relación teórica, estructura, etc.).
4. Que los cursos de matemática deben ser iguales o similares a aquellos impar-

tidos para futuros matemáticos profesionales. A lo sumo lo que debe cambiar es el número de contenidos o la dificultad de los ejercicios a resolver.

5. Que las matemáticas que debe aprender un educador matemático deben ser superiores y más amplias que las que debe aprender un ingeniero.

Todas estas ideas son equivocadas, y precisamente contrarían varios de los resultados de la investigación que hemos reseñado arriba.

Brevemente: las ideas 4 y 5 asumen implícitamente que la matemática y la Educación Matemática son profesiones que se identifican sin más. Aquí no hay variación en el significado cualitativo de las matemáticas en una y otra profesión. Y, en la realidad, las cosas son distintas: las matemáticas que ocupa un educador matemático no son las mismas que requiere un matemático ni las mismas que requiere un ingeniero: son distintas, tanto en el tipo de contenidos, como en la manera como se enseñan y apprehenden. Muchos temas de matemática para el ingeniero y la forma en que se les enseña no deben formar parte del currículo de un educador matemático; y así hay otros temas que deberá tener el currículo del educador matemático que no deben estar en el del ingeniero. Lo mismo pasa con la formación para el matemático. Ingeniero, matemático y educador matemático son profesionales distintos, que deben tener perfiles distintos y estar dotados de competencias diferentes.

Las ideas 1 y 2 expresan una convicción muy extendida: saber matemática es suficiente para enseñar matemática. Como afirmamos antes: eso es falso; es una condición necesaria, pero no suficiente. Todas las mediaciones entre contenido disciplinar y la práctica de enseñanza aprendizaje se pierden en esa visión. Son muchos los ejemplos de esto en el mundo, y también en la experiencia individual de la docencia. Cuánta matemática es la necesaria para enseñar, por ejemplo en la educación secundaria, es objeto de debate e investigación.

La tercera idea señala una visión alejada de la pedagogía y de las competencias profesionales. No deben ser los temas de las matemáticas (y su lógica teórica) solamente los que definan el currículo, y en particular definan las matemáticas que deben enseñarse. La experiencia internacional en la construcción de currículos se ha ido distanciando mucho de aquellas simples colecciones o listados de contenidos matemáticos que definen cursos y se orienta más hacia colecciones de situaciones didácticas o “problemas” estrechamente asociadas a propósitos pedagógicos. Contenidos, objetivos y metodología deben estar estrechamente integrados.

La matemática para el educador matemático no es cualquier matemática con finalidades distintas a las de ese profesional: en ese sentido, se trata, en efecto, de una matemática “aplicada”: “el conocimiento necesario para la enseñanza es diferente de aquel del que se necesita en otras ocupaciones” (Bass, 2005, p. 430).

El tema es complejo y vamos a proponer algunas características de las matemáticas para el educador matemático en la educación secundaria (niveles 7 a 12).

Empezamos, sin embargo, por mencionar dos situaciones “conflictivas” en la formación inicial del futuro educador:

- Si los cursos disciplinares se rigen por un modelo formalista (sobrecargado de aspectos axiomáticos, demostrativos y formales) y con metodologías de aula (tiempos y tipos de exposición, evaluación, etc.) conductistas (ausencia de resolución de problemas y aprendizajes activos y colaborativos, por ejemplo), eso pesará en la práctica profesional (ya sea que rehace su formación o la incorpore y fracase en su labor).
- Si los cursos que se imparten están abarrotados de contenidos o si “no alcanzan las lecciones” para su desarrollo y hay que acudir a tareas o trabajo extra-clase para desarrollarlos, los propósitos formativos están colocados en una perspectiva equivocada.

La última situación “conflictiva” que mencionamos arriba nos conduce a algo muy importante: uno de los criterios esenciales debería ser el *favorecer la profundidad* sobre la amplitud, uno de los resultados sobre el aprendizaje. Es decir: más que “cubrir” mucha materia, muchos tópicos, de lo que se trata es de ver algunos en profundidad y con objetivos diferentes a los usuales. Esto es importante porque la tendencia dominante en muchos formadores de profesores de matemáticas (basada en una óptica de los contenidos) es tratar de “ver” el mayor número de contenidos matemáticos, aunque se desarrollen con menor tiempo y calidad. Y algunos currículos en nuestros países están sobrecargados en contenidos matemáticos.

Even (2004) lo expresa con toda claridad:

Un enfoque tradicional para equipar a los profesores de matemáticas de la educación secundaria con conocimiento matemático es de naturaleza cuantitativa: “más es mejor”. Este enfoque está basado en la premisa que los educadores han aprendido, y entonces conocen las matemáticas escolares; y que los educadores deben saber más matemática que las matemáticas que deben aprender sus estudiantes, y entonces los estudios matemáticos avanzados son un buen indicador del conocimiento matemático adecuado para el educador. Sin embargo, muchas investigaciones (...) sugieren que los educadores de matemáticas de enseñanza media muy a menudo no poseen una comprensión sólida de las matemáticas que ellos necesitan usar y enseñar en la escuela. Esto incluye conceptos fundamentales del currículo de la escuela secundaria, como son las funciones y las demostraciones. (p. 171).

Estas opiniones son relevantes: es muy extendida la idea de aumentar cuantitativamente las matemáticas y sus competencias para mejorar su aprendizaje. Las opiniones que invocamos coinciden con investigaciones que se han realizado en

las últimas décadas: la investigación no ofrece tantos resultados que conecten mayor conocimiento matemático (después de cierto nivel) y mejor aprendizaje (Fennema y Loef Franke, 1992, p. 148).

Esta no es una situación, sin embargo, que poseen todos los currículos en el mundo. En algunos países su problema radica en que el conjunto de contenidos matemáticos es muy reducido, como en algunos programas de formación de escuelas normales en México. Una formación extremadamente débil en matemáticas no forma en muchas de las competencias que debe tener el educador matemático como la investigación de aula y la atención a estudiantes talentosos; provoca una equivocada transmisión de la naturaleza de las matemáticas; ofrece debilidad en la formación en la argumentación matemática y los métodos matemáticos y en muchas otras competencias matemáticas esenciales. Una formación extremadamente cargada en matemática, como en España, ha encontrado un fracaso también, por otras razones (como las pruebas PISA 2000 y 2003, entre otras, consiguieron).

Algo muy importante de señalar: la forma como se enseñen los contenidos matemáticos, también, influye decisivamente en los contenidos pedagógicos que adquiere el docente en formación. Esto posee dos aspectos. Por un lado:

Dentro de las clases universitarias de matemática, la principal preocupación entre la mayoría de matemáticos es todavía cuánto contenido hay que cubrir. Para cubrir ese contenido su instrucción muy frecuentemente preserva la exposición tradicional de la estructura formal del contenido. Los educadores en formación no tienen más opción que experimentar dos aproximaciones contrastantes de aprendizaje: orientación a procesos *versus* orientación al contenido. (Lin, 2004, p. 175).

Si una aproximación metodológica formalista y conductista predomina en ese aprendizaje matemático, la visión y los métodos que adquiere el educador en formación se verán afectados por esa perspectiva e influenciarán la forma como actuará en el aula posteriormente. Aunque el educador en formación reciba conocimiento pedagógico, por ejemplo, con énfasis constructivista y hacia la resolución de problemas, el modelo de matemática formalista y conductista que recibe en la formación matemática tenderá a deformar su conocimiento pedagógico. Un profesor universitario de matemática que asume como su lógica de clase el esquema clásico “definición-teorema-demostración-coroario-ejemplo-ejercicio-aplicación”, influirá en la percepción y conocimiento sobre las matemáticas de sus estudiantes con una mentalidad formalista errónea. Esto hace que los diferentes conocimientos (en las 4 categorías que hemos conceptualizado) que debe recibir el docente no puedan verse de manera “compartimentalizada”, aislados, pues lo que se hace con una mano se puede borrar con la otra, se invoca un currículo integrado.

Cuando los cursos de matemática son impartidos, por ejemplo, por matemáticos profesionales existen mayores posibilidades de que ofrezcan conocimiento sobre los métodos, estrategias y condiciones de construcción matemática, y no solo la arquitectura formal axiomática (que solo se consigna después del proceso de construcción cognoscitiva). Sin embargo, aumentan las posibilidades de que el matemático oriente sus clases por las necesidades y la lógica de su quehacer disciplinario sin objetivos que serían relevantes para el educador matemático (como el subrayar las relaciones entre el cuerpo general de la matemática y la “matemática para enseñar”, aplicaciones, etc.). Por otro lado, si los cursos no son impartidos por matemáticos profesionales, sino por profesores alejados de la construcción matemática (armados en algunos casos apenas de un poco más de matemáticas que sus alumnos, sin conocer de primera mano los temas en la vanguardia de su disciplina) éstos pueden exhibir percepciones sobre la naturaleza de ésta muy alejada de la realidad práctica de esa construcción, y se amplía la posibilidad de la transmisión de ideas equivocadas sobre la naturaleza de la práctica profesional matemática.

Es este un problema extendido, como lo consignan Li (2004) y Doerr (2004). Debe existir convergencia entre las matemáticas que recibe el educador en su formación inicial y la Educación Matemática, deben ser cursos adaptados a sus objetivos y perspectivas profesionales.

Por otro lado, existe un problema cuando las matemáticas universitarias no están estrechamente relacionadas con las escolares. Por eso Even (2004) afirma:

... basarse en los estudios matemáticos avanzados en el nivel universitario para obtener un conocimiento matemático adecuado para el educador de las matemáticas escolares de la educación media es problemático. Aparentemente, aún si los educadores ya han aprendido como estudiantes las matemáticas que necesitan enseñar, y luego han estudiado matemáticas aún más avanzadas, ellos necesitarán todavía que re-aprendan las matemáticas que tienen que enseñar (p. 172).

No se trata por supuesto que la formación matemática del educador matemático sea solamente un poco mayor que la que recibió en la secundaria, sino que las matemáticas escolares sean un foco de la atención de su formación profesional. Que los tópicos del currículo escolar sean objeto para moldear la formación matemática más elevada.

La conclusión inevitable: la enseñanza de la matemática para los educadores matemáticos no debe asumirse como la adecuada sin necesidad de un escrutinio y planificación mayores. Es decir, qué se enseña de las matemáticas y cómo se enseñan las matemáticas para los educadores matemáticos debe ser establecido dentro de una estrategia coherente precisa.

Profundidad mejor que amplitud: criterios.

La mayor profundidad como criterio puede ser inservible si no se le brinda un cuerpo. Proponemos que profundidad, para los cursos de matemática en la formación de educadores matemáticos, se entienda como, en cada tópico, analizar: diferentes representaciones (cuando sea posible: visual, operativa, formal, relacional, e incluso con usos de tecnología si es pertinente, etc.), contextos sociohistóricos, aplicaciones, algunas estrategias de enseñanza (didácticas), más ejercicios, etc. Profundidad sobre amplitud implica en cada curso: seleccionar con precisión los tópicos a enseñar. Debe tomarse en cuenta, sin embargo, que no es lo mismo un curso inicial que uno intermedio o uno final en la materia que se va a desarrollar. En los finales debe existir más flexibilidad.

El criterio que se ha enfatizado hasta ahora en la formación matemática para docentes de secundaria ha sido casi siempre el de la lógica de los contenidos (por ejemplo: ¿cómo no vamos a ver las demostraciones detalladas de los teoremas de existencia y unicidad en ecuaciones diferenciales?). Han sido las necesidades de las matemáticas propiamente o la de los profesores de matemáticas en las universidades (sus ideas, necesidades o prácticas tradicionales) las que han dominado muchas veces el currículo en los cursos de matemática. Los libros de texto que se suelen usar son simplemente de matemáticas (a veces hacia matemáticos, a veces hacia ingenieros) y no orientados a la profesión del educador. Las notas de clase en forma de folletos o hasta elevados a formato de libro que a veces se usan solo reproducen la misma experiencia.

A la luz de lo que hoy se sabe sobre la Educación Matemática en el mundo, las preguntas que se debe responder, en el desarrollo de cada curso, son otras: ¿de qué manera este curso deberá servir al futuro docente? ¿Cuáles son las competencias que favorecen el curso y cada contenido del mismo? La vocación pedagógica debe nutrir cada curso de matemática de una manera específica. ¿Cuáles son los temas centrales? ¿Cuáles temas permiten mayores aprendizajes y conexiones disciplinares o transdisciplinares?

En varios países e instituciones formadoras de formadores donde los currículos están sobrecargados de contenidos y se busca realizar un rediseño curricular emergen preguntas evidentes: ¿qué tópicos se deben quitar para poder profundizar otros? ¿Cómo hacerlo? ¿Cómo traducir estos propósitos en los cursos de pedagogía general, y en los de matemáticas?

Pensamos que, además de una selección cuidadosa de los tópicos (que en algún momento debería ser establecida con base en un currículo diferente), podemos sistematizar resumidamente algunas características “deseables” que hemos abordado antes y que pueden servir como una guía.

Características “deseables” en la lección de matemáticas.

(1.) Mostrar relaciones del tópico con otras áreas de las matemáticas: ver las aplicacio-

nes o relaciones dentro de las matemáticas (métodos comunes, etc.). Por ejemplo: la teoría de grupos sirvió para clasificar las geometrías, lo que además invoca la historia. Esto es importante, porque al verse las relaciones entre campos de las matemáticas se aprecia mejor el valor de los métodos y la unidad de las matemáticas.

(2.) Establecer relaciones explícitas entre la matemática para enseñar (el currículo escolar al que va orientada la carrera) y las matemáticas que tenemos en las aulas universitarias. Partir de los contenidos del currículo escolar siempre y subir poco a poco a lo más general. Buscar implicaciones de la matemática teórica sobre el currículo escolar. Ej.: Al estudiar el anillo de polinomios, se pueden usar múltiples ejemplos de ese currículo escolar. Incluso conceptos como el de “ideal” en álgebra se pueden visualizar más (no solo ver su definición, propiedades y sus relaciones con otros). Con más razón, en cálculo o en probabilidad. Las series, por ejemplo, poseen muchas aplicaciones dentro y fuera de las matemáticas. Los desarrollos limitados están asociados al estudio de aproximación, a modelos, etc. Hay grupos aplicados famosos en la física (de fases, Relatividad, etc.). Esto es de lo más importante porque ofrece a las matemáticas que se enseñan en el nivel superior sentido y motivación intelectual para el estudiante.

La pedagogía específica, que describimos en detalle, se ve beneficiada por una formación y matemática que subraya adecuadamente interrelaciones entre la matemática para enseñar y las matemáticas teóricas y sus perspectivas en general. Es decir: la relación en que los contenidos disciplinares del currículo escolar y las matemáticas modernas debe ser explícita. Algunas veces esta relación se expresa como “matemáticas escolares desde una perspectiva superior”. Se dirige a apuntar la construcción de planes de formación de educadores matemáticos basados en los componentes del currículo escolar y no al revés que es lo que ha predominado durante mucho tiempo en varias latitudes.

(3.) ¿Cuál es el sentido de contenidos meta-matemáticos? Pensamos que son relevantes contenidos sobre las matemáticas desde una perspectiva diferente: valoración de sus estructuras, sus métodos de pensamiento, sus perspectivas teóricas, en fin asuntos que refieren a la filosofía. De igual manera, la colocación de las matemáticas en contextos históricos y socioculturales es vital no solo para comprender la naturaleza de las matemáticas, sino también como un recurso vital para la práctica del educador. Esta visión la afirman, por ejemplo, Niss y PISA 2003, como pulsiones transversales: historia y filosofía de las matemáticas, relación de aplicación de las matemáticas en el entorno socio-cultural y físico. La historia y en general los conocimientos meta-matemáticos ofrecen no solo recursos pedagógicos muy especiales, sino perspectivas muy importantes sobre la naturaleza de las matemáticas. Este tema se puede vincular mucho a las creencias y a la cultura que intervienen en los procesos de esta práctica profesional.

(4.) Recurrir a modelos o aplicaciones de algunos de los tópicos, la relación con el entorno y la realidad. Esto no se puede hacer de la misma manera en todo los cursos. Pero casi todos los conceptos del currículo que tenemos en enseñanza de la matemática

permiten aplicaciones. La modelización, por ejemplo, es uno de los temas fuertes en la Educación Matemática actual. El propósito responde a la necesidad de visualizar las matemáticas para la enseñanza. Esto posee implicaciones no solo sobre cada curso sino sobre el conjunto del currículo (en la selección y definición de cursos de cada área, y en los propósitos a plantear). Conocimientos de modelización, matematización y problemas contextualizados deben ser parte usual de los contenidos que deben dominar los educadores matemáticos.

(5.) Otro elemento clave que debe incorporarse en la formación de los futuros educadores matemáticos es la presentación de los conceptos y métodos matemáticos acudiendo al mayor número de representaciones de los mismos: numéricas, algebraicas, gráficas, geométricas, visuales, con tecnologías digitales, etc. Debe pensarse que el profesor se va a enfrentar a estudiantes con capacidades o aproximaciones múltiples hacia el aprendizaje. El dominio de múltiples representaciones o estrategias permitiría recursos imprescindibles para el educador en el aula. Esto obliga a darle énfasis de maneras muy distintas a las matemáticas que reciben los futuros profesores de aquellas matemáticas que requieren los futuros matemáticos profesionales o los ingenieros, por ejemplo.

Existe una correlación positiva entre un conocimiento matemático integrado, con una fuerte comprensión de las relaciones teóricas dentro de las matemáticas y su conexión con el entorno, y el impacto en el aula.

Figura 2. Algunas características convenientes en las Matemáticas de la formación inicial del profesor de Matemáticas



Resolución de problemas.

Es aconsejable introducir la resolución de problemas como una estrategia metodológica en el aula. ¿Cómo se va a pedir que los futuros docentes propongan o usen la resolución de problemas en sus clases si no enseñamos así en la universidad o en las escuelas normales? En lugar de exponer teoría, enunciar y ver las demostraciones de n teoremas, y luego hacer ejercicios (el esquema formalista), se debería seleccionar un tema, empezar por problemas ilustrativos y significativos, y crear el contexto para los teoremas. Los resultados de la investigación internacional en la Educación Matemática así como las experiencias escolares en varios países, subrayan la relevancia de la resolución de problemas en las lecciones de matemáticas, como instrumentos articuladores de la misma y para el desarrollo del currículo.

Hacer lo contrario del esquema formalista no es fácil. Hay al menos dos elementos que pesan en su contra: por un lado, que muchos de los resultados que ya existen en el mundo sobre esto (hallazgos y experiencias novedosas) a veces no se encuentran muy disponibles para usarse en la labor de aula (a veces por limitaciones de idioma); por otra parte, lo más importante, que muchos de quienes enseñan en las universidades han sido formados en los esquemas, actitudes y modelos formalistas. Las creencias que nos han heredado sobre la naturaleza de las matemáticas es un factor que juega un papel muy importante. La reacción al cambio, además, es un asunto social y cultural muy complejo. Y en este tema, con una disciplina científica y profesional que tiene apenas unos 50 años, es especialmente difícil. Sin embargo, esta vía estratégica de construcción de la acción de aula con base en problemas es una perspectiva prometedora. Y debe hacerse un esfuerzo por usarla y contextualizarla en las condiciones curriculares de cada país.

Demostraciones

El lugar de los métodos de argumentación y demostración matemáticas es muy importante en los currícula de formación para profesores de matemáticas: es una de las características centrales de las matemáticas como disciplina. Ahora bien, la perspectiva del educador, obliga a darle el lugar que le corresponde en los cursos de matemáticas.

Cuando se estudian las demostraciones, dentro de esa visión “aplicada”, es importante señalar el tipo de métodos demostrativos, su relación con otros, debe preguntarse siempre qué se aprende de una demostración. Muchas de las demostraciones son demasiado particulares. Las interesantes para el educador matemático son, sin embargo, las que usan métodos de aplicación más general. Estas son las que brindan más lecciones para el estudiante. Si se van a ver n teoremas,

deben enfatizarse aquellos que posean mayor significado educativo (generalidad, aplicabilidad, conexión con otros temas). Algunas demostraciones no son necesarias y más bien su introducción obstruye la comprensión de conceptos y métodos matemáticos más relevantes.

Estas características suponen una preparación meticulosa del curso y de cada lección dentro de la nueva perspectiva. Y, por supuesto, la evaluación deberá corresponder a esta visión.

Evaluación.

El tema de la evaluación es uno de los más importantes a los que nos enfrentamos. Una evaluación inapropiada puede echar por tierra todos los buenos propósitos formativos y todas las ideas renovadoras. Ha sido una de las grandes debilidades en la enseñanza de las matemáticas. Y en la formación docente en matemáticas que hemos tenido en las diferentes universidades se han cometido muchos errores en esta dimensión. Se han repetido esquemas evaluativos que no subrayan los aspectos formativos, no incorporan las conexiones con otros propósitos de la educación (como la investigación, o los aprendizajes interactivos y colaborativos), o la formación en modelos para la futura labor práctica del profesional que se forma. Muchas veces, en exámenes, lo que se evalúa no corresponde a lo que se enseña. No ha sido difícil cometer errores en cuanto a la convergencia entre la lección que se ha dado y lo que se exige luego en un examen a los estudiantes. Los principios de evaluación general que se enseñan en los cursos educativos raramente se han incorporado en los cursos de matemática. Otro más de los ejemplos de esa separación entre disciplina y pedagogía.

Como sugerencias generales en busca de mejorar los procesos de evaluación proponemos: alrededor de un 50% debe ser evaluado por medio de proyectos (tareas, pequeñas investigaciones, portafolios, etc.). Todo medido: tareas imposibles o que significan tiempos casi infinitos no tienen sentido. Es aconsejable que estos proyectos vayan orientados a la formación docente. Es decir, temas que conecten con dimensiones interesantes para la labor de aula futura: puede ser el espacio idóneo para introducir mucha historia, contextualizaciones, modelizaciones, o relaciones con otros campos de las matemáticas. No debe, en general, concebirse como un espacio adicional para desarrollar más contenidos matemáticos. El otro porcentaje con exámenes. Estos exámenes deben estructurarse de acuerdo a lo que se enseñó en el aula: misma proporción de aspectos demostrativos por ejemplo, nivel de dificultad similar ... (un porcentaje debe ser tomado de prácticas o tareas dadas con anterioridad). Insistimos en temas desarrollados en el aula, porque a veces se ponen trabajos extractase demostrativos (que no se ve en el aula, o se ven poco) y se evalúan en los exámenes. También debe haber partes con

situaciones novedosas, porque hay que recordar la importancia de la transferencia (enfrentarse a nuevas situaciones) en la formación disciplinar.

El propósito de estos cursos, debe recordarse siempre, es preparar a los estudiantes en las matemáticas que requiere un educador matemático en la educación secundaria. Las conexiones deben ser directas y explícitas con las matemáticas del currículo escolar, siempre que sea posible. Y no solo al principio del curso o en declaraciones verbales generales, sino a lo largo del todo el curso. Esto no se puede hacer por supuesto de la misma manera en cada curso.

Los proyectos pueden ser un instrumento para ir desarrollando habilidades dentro de los estudiantes en la investigación; además pueden invocar aprendizajes colaborativos.

En algunos cursos los proyectos pueden ser un espacio muy rico en el que la tecnología digital pueda usarse con mucha pertinencia.

Evidentemente, este tipo de enfoque implica mucho más trabajo que simplemente seguir un texto al pie de la letra, es más complejo que evaluar la materia por medio solamente de exámenes. No siempre es fácil vincularse a los contenidos del currículo escolar y las consideraciones pedagógicas. Por eso es necesaria una preparación meticulosa.

Punto de partida todavía válido.

Una colección de sugerencias de partida todavía válidas sobre las características del conocimiento matemático para el educador matemático:

- conocimiento del contenido y discurso de las matemáticas, incluyendo conceptos y procedimientos matemáticos y las conexiones entre ellos,
- representaciones múltiples de conceptos matemáticos y procedimientos,
- formas de razonar matemáticamente, resolver problemas, y comunicar la matemáticas efectivamente en diferentes niveles de formalismo, además,
- desarrollar sus perspectivas sobre la naturaleza de las matemáticas, la contribución de diferentes culturas en el desarrollo de las matemáticas, y el papel de las matemáticas en la cultura y la sociedad,
- los cambios en la naturaleza de las matemáticas y la forma en la cual enseñamos, aprendemos y hacemos matemáticas como resultado de la disponibilidad de tecnologías,
- matemáticas escolares dentro de la disciplina de las matemáticas,
- la naturaleza cambiante de la matemática escolar, su relación con otras materias escolares, y sus aplicaciones en la sociedad (*National Council of Teachers of Mathematics*, 1991, p. 132).

Muchos de estos aspectos se deben reflejar directamente en la labor de aula en las universidades. Cursos de matemática donde se invocan contextualizaciones, historia, representaciones múltiples, modelización, vínculo con el currículo escolar, etc., que, como señalamos, en particular, deben expresarse en los procesos de evaluación.

5. Proporciones

¿Cuáles deben ser las proporciones que deben tener los diferentes componentes dentro del currículo?

La búsqueda de mediaciones entre disciplinas y práctica profesional es un importante denominador común en las perspectivas internacionales: hay consenso en que no es conveniente una formación academicista al margen de una orientación profesional. Los esquemas que han dominado hasta hace poco tiempo en muchos países europeos, por ejemplo, como España y Holanda, han tenido poco espacio dentro de sus currículos para la profesionalización del educador y para competencias y conocimientos en pedagogía matemática. Mucha matemática, poca pedagogía. PISA 2000 y 2003, con resultados educativos no muy alegres para los estudiantes de estos países, señaló que la orientación no era la adecuada:

- La comparación de los resultados de la prueba de matemáticas -en relación con PISA 2000, añadido por A. Ruiz-, frente a los globales y a los de Portugal -nivel de inversión por alumno similar a la de España- muestran que el porcentaje medio de aciertos es del 51% para los alumnos españoles frente a una media internacional del 55% (Gómez, Puig, Quirós, y Viaño, 2004, p. 9).
- En el año 1994, la Comisión Europea presentó un informe sobre el fracaso escolar en la Unión Europea (UE) que revelaba que en nuestro país -España, añadido A. Ruiz- cerca del 23% de los jóvenes no obtenía el diploma correspondiente al final de la escolarización obligatoria. España era entonces el segundo país de la UE con mayor número de fracasos escolares, sólo superado por Holanda (26%) (Gómez *et al*, 2004, p. 9).

Las nuevas propuestas, para la educación, pareciera, buscan un compromiso con lo que ha existido y con la incorporación de enfoques distintos que han adquirido mayor *momentum* en la investigación internacional (profesionalización, pedagogía específica).

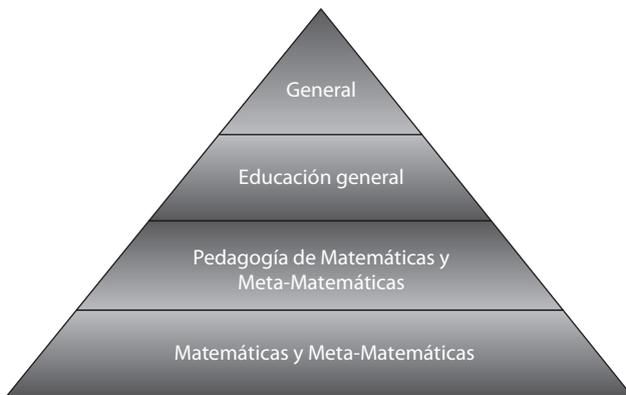
Es difícil pensar que existe una estructura de componentes curriculares de aplicación universal para todos los países. Cada cual, sin embargo, debe tallar esa es-

estructura con base en sus contextos y objetivos. Por ejemplo, en el caso de Noruega, Kleve y Jaworski (2004) documentan una situación que es común en varios países: por un lado, los estudiantes salen de la secundaria con muy malos niveles de competencia matemática, y, en segundo lugar, los profesores de matemática en formación son de los de menor nivel de competencias matemáticas. Esto les obliga a realizar acciones adicionales de formación universitaria para proporcionar competencias matemáticas (en el caso de Noruega, dos años de estudios antes de entrar en enseñanza de matemática). El currículo debe tomar en cuenta esa situación. Es un llamado a tomar en cuenta la especificidad y los contextos locales.

Si las competencias matemáticas con las que ingresan a la universidad son muy buenas, como en el caso de Japón y Finlandia, es posible desarrollar plenamente un currículo que incorpore todos los aspectos que hemos planteado en nuestra propuesta.

En general lo que pensamos puede ser un buen punto de partida, es lo que se puede recoger en un modelo piramidal de la siguiente manera.

Figura 3. Pirámide de conocimientos para la formación de profesores de matemáticas.



La base de la pirámide es la formación más importante: Matemáticas y Meta-Matemáticas, seguida de aquella en la Pedagogía de éstas, para luego dar lugar a la Educación General y a los Conocimientos Generales. Los componentes se deberían ajustar de acuerdo a las condiciones de cada país, o también si la formación es destinada a enseñar entre los grados 7 y 12 de la educación media, o si el objetivo es solo la enseñanza en los grados 7-9. En todo caso, lo que no es un tema que vamos a abordar acá, todo parece apuntar en la investigación internacional a potenciar una sólida formación matemática y meta-matemática para los profesores de matemáticas para toda la educación media.

6. Conclusiones

Los temas del currículo para la Educación Matemática se han convertido desde hace muchos años en un asunto central de la investigación en esta disciplina. Especialmente, por la misma naturaleza de ésta, que asume un puente natural entre la teoría y la práctica. La formación de los educadores matemáticos, inicial y continua, constituye la clave para poder potenciar los esfuerzos de progreso educativo, y para, al mismo tiempo, nutrir nuevos momentos de avance cognoscitivo.

Los conocimientos que debe poseer el educador matemático son una parte medular de su formación, aunque no la única. Los valores, actitudes, .. también pesan mucho. Pero asegurar que esa parte sea apropiada se vuelve sustancial. Y en este territorio la investigación y las experiencias internacionales pueden aportar mucho. Sin duda representó un fuerte “clarinazo” el pronunciamiento de Shulman en el año 1986, apuntalando el CPC con base en la premisa esencial de que no basta el conocimiento disciplinar: es necesario pero no suficiente. Y las transposiciones didácticas o las mediaciones de la disciplina a la práctica de aula no deben ser ajenas de la formación inicial y la continua de todos los educadores de enseñanza “de”. En el caso de las matemáticas, esto que se debería haber asumido rápidamente, ha contado con una inercia de las fuerzas dominantes que asumieron los *currícula* con base en los contenidos disciplinares sin más y la estructura de las necesidades de los matemáticos; un asunto que, por supuesto, tiene su historia, porque, para no ir muy lejos: la reforma de las “matemáticas modernas” fue un gran momento para apuntar precisamente muchas de las cosas que no había que hacer. Pero bueno, de múltiples maneras se ha llegado a nuevos derroteros y al progreso de una nueva disciplina científica y una práctica profesional correspondiente, en las que en poco tiempo se ha cristalizado un cambio notable. Las nuevas fases en la enseñanza de las matemáticas, afirman precisamente ideas específicas con base en la práctica y en la investigación. Todavía muchas de éstas no han calado con la profundidad que se debiera, pero todo apunta en esa dirección, y se debe reconocer: algunos países, regiones y comunidades más audaces o con ciertas condiciones sociales, económicas y culturales que hay que estudiar bien, se han adelantado y encontrado buenas rutas de progreso en la Educación Matemática.

En este trabajo hemos ofrecido una propuesta para un modelo que integre los conocimientos que debe incorporar la formación de los educadores matemáticos, y descrito algunas de esas dimensiones. Tal vez lo más relevante sea la propuesta de redefinir las matemáticas que deben incorporarse, “aplicadas”, pero con el sentido de un equilibrio integrador con los otros componentes, y adaptado todo a contextos socioculturales y educativos específicos. Es decir: además de afirmar

el estatus de la Educación Matemática como una nueva disciplina científica independiente, ofrecer las características que en sus *currícula* de formación así lo expresan: potenciación del CPC, matemáticas “aplicadas” para el educador y un equilibrio de sus componentes con arraigo local. Aun más lejos, para aterrizar las abstracciones, se ha querido en este artículo precisar y detallar algunos de los elementos que esos grandes componentes pueden suponer. De esta forma, pensamos se podría avanzar en las investigaciones y las experiencias prácticas necesarias para ir conformando con especificidad lo que apenas quisimos delinear aquí, darle cuerpo al esqueleto intelectual que hemos planteado, y abrir avenidas que permitan sostener y nutrir importantes intentos de cambio que se están dando en varias partes del mundo.

Referencias y bibliografía

- Bass, H. (2005). Mathematics, mathematicians, and Mathematics education, *Bulletin* (New Series) of the *American Mathematical Society*. Volume 42, Number 4, Pages 417–430, S 0273-0979(05)01072-4. Artículo publicado electrónicamente el 23 de junio del 2005
- Bolívar, A. (2005). Conocimiento didáctico del contenido y didácticas específicas, *Profesorado. Revista de currículo y formación del profesorado*, 9, 2.
- Bransford, J. D.; Brown, A. L. & Cocking, R. R. (2000) (Eds.). *How people learn. Brain, Mind, experience, and School*. Washington D. C., USA: National Academy Press.
- Brown, C. A., y Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. En D. A. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.
- Clarke, D; Emanuelsson, J.; Jablonka, E. & Mok, I. A. C. (2006) (Eds.). *Making Connections. Comparing Mathematics Classrooms Around The World*. The Netherlands: Sense Publishers.
- Clarke, D.; Keitel C. & Shimizu, Y. (2006) (Eds.). *Mathematics Classrooms in Twelve Countries: The Insider's Perspective*, The Netherlands: Sense Publishers.
- Doerr, H. M. (2004). Contribución escrita, en Doerr y Wood: International perspectives on the nature of mathematical knowledge for secondary teaching: progress and dilemmas. *Proceedings of the 28Th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*.
- Doerr, H. M. & Wood, T. (2004). International perspectives on the nature of mathematical knowledge for secondary teaching: progress and dilemmas. En *Proceedings of the 28Th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*.
- Even, R. (2004). Contribución escrita, en Doerr y Wood: International perspectives on the nature of mathematical knowledge for secondary teaching: progress and dilemmas. *Proceedings of the*

28Th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education.

Fennema, E. & Loef Franke, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. A. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Gómez, B.; Puig, L.; Quirós, A. y Viaño, J. M. (2004). La convergencia europea en educación y las nuevas leyes educativas españolas (LOU y LOCE). En línea: http://www.agapema.com/activ/act_formacion/Grupo_I.doc

Grossman, P.L. (1989). A study in contrast: sources of pedagogical content knowledge for secondary english. *Journal of Teacher Education*, 40, 24-31. Edic. cast.: Un estudio comparado: Las fuentes del conocimiento didáctico del contenido en la enseñanza del inglés en Secundaria. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 9 (1), 2005. Referencia citada por Bolívar, A. (2005).

Gudmundsdottir, S. (1990). *Nancy: pedagogical content knowledge of an expert teacher*. Charla en la Annual Meeting of the American Educational Research Association, Boston. Referencia citada por Bolívar, A. (2005).

Hashweh, M. (2005). Teacher pedagogical constructions: a reconfiguration of pedagogical content knowledge. *Teachers and Teaching: theory and practice*, 11 (3), 273-292. Referencia citada por Bolívar, A. (2005).

Kleve B.; Jaworski, B. (2004). Contribución escrita, en Doerr y Wood: International perspectives on the nature of mathematical knowledge for secondary teaching: progress and dilemmas. *Proceedings of the 28Th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*.

Liljedahl, P.; Rolka, K. & Rösken, B. (2007). Affecting Affect: The Reeducation of Preservice Teachers' Beliefs about Mathematics Learning and Teaching. En W. G. Martin, M. E. Strutchens, P. C. Elliot (Eds), *The Learning of Mathematics (Sixty-ninth Yearbook)*, (pp. 319-330), Reston, VA, EUA: NCTM

Lin F. L. (2004). Contribución escrita, Doerr y Wood: International perspectives on the nature of mathematical knowledge for secondary teaching: progress and dilemmas. *Proceedings of the 28Th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*.

Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education*, 41 (3), 3-11. Referencia citada por Bolívar, A. (2005).

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

Niss, M. (2000). Key Issues and Trends in Research on Mathematical Education. Presentación plenaria en el *IX International Congress of Mathematics Education* en Japón. Una versión en línea se encuentra en: <http://maths.creteil.iufm.fr/Recherche/icme/MORGEN.htm> (página visitada el 28 de abril del 2007).

Pp't Eynde, P.; de Corte, E. & Verschaffel, L. (2001). Problem solving in the Mathematics Classroom: A Socio-constructivist Account of the Role of Students' Emotions. En Marja van den Hauvel-Panhuizen (Ed.) *Proceedings of the Twenty-fifth Annual Conference of the International Groups for the Psychology of Mathematics Education*, vol 4, (pp. 25-32), Holanda: PME.

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las Matemáticas*, San José, Costa Rica: EUNED. <http://cimm.ucr.ac.cr>

Ruiz, A.; Barrantes, H. & Gamboa, R. (2009). *Encrucijada en la Enseñanza de las Matemáticas: la formación de educadores*. Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Ruiz, A.; Chavarría, J. & Alpízar, M. (2003). Epistemología y construcción de una nueva disciplina científica: la *Didactique des Mathématiques*. Revista *UNICIENCIA*, Vol. 20 Número 2, 2003, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional. Heredia, Costa Rica.

Schoenfeld, A. (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the AMS*, Volume 47, Number 6; June/July 2000. Traducción al español de Juan Godino.

Shulman, L. S. (1986, Feb.). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, Vol. 15, No. 2, pp. 4-14

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review* (1), 163-196). La versión que usamos es una traducción española en Profesorado. Revista de currículo y formación del profesorado, 9, 2 (2005).

Shulman, L. S. & Quinlan, K. M. (1996). The comparative psychology of school subjects. En Berliner, D.C. y Calfee, R.C. (eds.), *Handbook of Educational Psychology*. Nueva York: Macmillan, 339-422. Referencia citada por Bolívar, A. (2005).

Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York: The Free Press.

