

# Desenvolvimento do pensamento algébrico no currículo de escola básica: caso de modelagem pictórica da Matemática de Singapura<sup>1</sup>

Yuriko Yamamoto Baldin

## Resumo

O ensino da álgebra constitui uma dificuldade para os professores de matemática do ensino fundamental, devido à complexidade da linguagem de representação, própria da abstração matemática. As investigações sobre o pensamento algébrico ao longo do currículo escolar indicam a importância da fase intermediária da pré-álgebra, entre anos iniciais e finais, que requer um ensino e aprendizagem nos anos iniciais que tornem a transição efetiva. O objetivo deste trabalho é discutir, sob a ótica de formação de professores dos anos iniciais, a evolução do pensamento algébrico que pode ser trabalhada por meio do modelo pictórico da Matemática de Singapura. A metodologia se baseia em análise qualitativa de uma sequência de atividades selecionadas de uma coleção de livros didáticos da Singapura, pelas competências esperadas pelo currículo do ensino básico. Concluimos que a coleção apresenta uma proposta adequada para a aprendizagem dos professores sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico para transição na pré-álgebra.

## Palavras chave

Conhecimento de matemática para ensino; conhecimento pedagógico de conteúdo; desenvolvimento de pensamento algébrico para a pré-álgebra; formação de professores de anos iniciais; modelagem por barras da Matemática de Singapura.

## Abstract<sup>2</sup>

Due to the complexity of the language of representation necessary for mathematical abstraction, the teaching of elementary algebra is a difficulty for mathematics teachers. Investigations of algebraic thinking throughout the school curriculum indicate the importance of the intermediate phase of pre-algebra between early and late years, which requires teaching and learning in the early years to make the transition effective. The objective of this work is to discuss, from the point of view of teacher preparation for the early years, the evolution of algebraic thought that can be worked through the pictorial model of Mathematics in Singapore. The methodology is based on qualitative analysis of a sequence of selected activities from a collection of Singapore textbooks, by the competencies expected in the basic education curriculum. We conclude that the collection presents an adequate proposal for the teachers learning about the development of algebraic thought for transition in pre-algebra.

---

Y. Y. Baldin

Universidade Federal de São Carlos, Brasil  
[yuriko@dm.ufscar.br](mailto:yuriko@dm.ufscar.br)

<sup>1</sup> Este trabajo corresponde a la conferencia paralela dictada por la autora en el II CEMACYC, celebrado en Cali, Colombia, del 29 de octubre al 1 de noviembre de 2017.

<sup>2</sup> El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 15 de febrero de 2018 y aceptado el 20 de marzo de 2018.

*Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 2018. Año 13. Número 17. pp 31-44. Costa Rica

## Keywords

Knowledge of mathematics for teaching; pedagogical content knowledge; development of algebraic thinking for pre-algebra; teacher preparation; Singapore Math Bar Model.

## 1. Introdução

Este texto baseia a conferencia “Desarrollo de pensamiento algebraico en el currículo de la escuela básica: caso de modelización pictórica de Matemática de Singapur” proferida dentro da programação do II CEMACYC, Cali.

Os professores na sala de aula e também os matemáticos e os educadores enfrentam, com frequência, o desafio de responder à questão recorrente dos alunos: “Por que temos que aprender álgebra?”. A abstração do raciocínio matemático que envolve dimensões intuitiva, indutiva e dedutiva se mostra mais contundente na área da álgebra que trabalha uma linguagem simbólica da matemática que, por sua vez, contribui sobremaneira ao avanço do conhecimento científico de variadas formas, desde há muitos séculos, e às aplicações no mundo em que vivemos. Desta forma, a álgebra é uma componente do currículo escolar como um tópico essencial da educação básica, para a formação dos cidadãos do século 21, como registram os documentos oficiais de países em geral, e em particular no Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) e a recém aprovada Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Fundamental (BRASIL, 2017). Em especial, cabe ressaltar que o papel do pensamento algébrico na aprendizagem da matemática escolar está relacionado ao domínio da linguagem de representação da matemática abstrata, que inclui a representação simbólica e sua manipulação regida por estruturas matemáticas. A trajetória de aprendizagem da apropriação de linguagem simbólica como caminho para a matemática formal, a partir da percepção por manipulação do concreto, é tema de pesquisa em Educação Matemática, teorizado por pesquisadores em cognição e aprendizagem; por exemplo, Tall (2015) discute a incorporação conceitual (conceptual embodiment), simbolismo de processos e conceitos (proceptual symbolism) e o formalismo (axiomatic formalism) para desvendar os processos de desenvolvimento cognitivo na aprendizagem da matemática em que se enquadra o desenvolvimnto do pensamento algébrico.

Neste trabalho, não aprofundaremos na direção de pesquisa cognitiva, mas focamos as atividades matemáticas dos anos iniciais que auxiliem os professores desses anos a compreenderem uma sequencia de desenvolvimento do pensamento algébrico ao longo de uma proposta curricular. Vamos adotar uma linha de discussão sob perspectiva de conteúdo curricular, próximo da prática efetiva dos professores na sala de aula que se alinhe com o desenvolvimento da disciplina matemática formal, como uma contribuição aos cursos de preparação de professores de matemática para a realidade da escola atual.

Matemáticos como Stewart (1995), Wu (2009), mostram o entendimento dos avanços da Matemática como disciplina, cuja trajetória envolveu sempre a descoberta e inclusão de novos conceitos a partir do conhecimento anterior, ao longo dos tempos. Isto é fato notório, presente também em livros didáticos que procuram organizar os conteúdos curriculares, acompanhando o avanço dos anos escolares e a capacidade cognitiva

de aprendizagem pelas idades dos estudantes. Por outro lado, Stewart aponta na página 1 da obra citada que, nas escolas, muitos novos conceitos são introduzidos sem haver compreensão de como eles se relacionam com a matemática tradicional em execução. Da mesma forma, Wu (2009) aponta uma lacuna que existe entre a aritmética dos primeiros 5 anos do ensino básico e a álgebra dos 8º e 9º anos, lacuna que corresponderia à necessária fase de transição, a fase da pré-álgebra.

No contexto das escolas brasileiras, apesar da indicação nos documentos (BRASIL, 1998) e nas recomendações curriculares dos cursos de formação de professores sobre a necessidade de aprender a ensinar com compreensão conceitual, e também as aplicações dos conceitos matemáticos, o ensino tende a ser procedimental, e especialmente a álgebra é entendida como manipulação de fórmulas e expressões com símbolos e letras, cujos significados variam conforme o contexto (matemático ou na resolução de problemas), mas não reconhecidos ou trabalhados com conexões. Logo, esta visão do papel da álgebra na prática escolar está longe do pensamento matemático que se deseja como meta educacional da matemática. Stewart (1995, p. 5) advoga que o pensamento matemático começa com uma intuição diante de situação problema antes de qualquer formalismo, e que a intuição embasa futura formalização de deduções. Embora esta visão seja um consenso entre matemáticos e educadores, por exemplo, (Tall, 2015), (Kaput, 1999), (Vlassis & Demonty, 2002), existem dificuldades de abordagem da problemática em trazer efetivamente para a formação de professores as metodologias que percorram a trajetória de desenvolvimento do pensamento matemático, em particular do pensamento algébrico.

Há boas referências que se apoiam na estrutura organizada dos conceitos matemáticos para explicar aos futuros professores a abordagem matemática do conteúdo para o ensino de tópicos de álgebra do currículo escolar, como (Wu, 2009), (French, 2002) e outros, mas no nosso entendimento o enfoque direcionado “da disciplina matemática para a atividade escolar”, com conteúdo que almeja, sob forma ainda que implícita, a álgebra elementar do ensino médio, não ajuda em geral a formação dos professores dos anos iniciais, que não recebem educação especializada em matemática, e cujas visões da matemática estão aquém da compreensão que o tema requer. Queremos dizer que há necessidade de abordar a problemática também na direção “de baixo para cima”, isto é, do conteúdo escolar de Números e Aritmética, Formas/Geometria, Medidas de Grandezas e Linguagem de Representação de Informações, com suas pedagogias naturais e adequadas ao desenvolvimento da criança, desde os primeiros anos, na direção da sistematização dos conceitos e ideias da matemática, na transição pela pré-álgebra que desenvolve o pensamento matemático. Esta orientação de visualizar o ensino e aprendizagem da álgebra, de “atividade escolar para a matemática abstrata” encontra fundamentação em posições similares defendidas em (Kaput, 1999).

Apresentamos a seguir argumentos para fundamentar a questão norteadora da pesquisa desenvolvida em um projeto de conclusão de curso de licenciatura de matemática de uma aluna com formação anterior de pedagogia, atuante nas salas de aula dos anos iniciais do ensino fundamental.

## 2. Referencias da pesquisa em educação matemática

A preocupação dos pesquisadores em educação matemática na perspectiva de viabilizar a educação escolar que desenvolva o pensamento algébrico a partir do ensino significativo da matemática desde os anos iniciais, vem de longa data. Nos referimos aqui a trabalhos do Mathematics Learning Study Committee do PME, especialmente o livro que sistematiza as contribuições neste tema das investigações nos anos 90, (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Na página 314 desta obra, no capítulo “da Aritmética para Números”, encontramos considerações como “Em, geral, o pensamento aritmético dos estudantes... da escola elementar é diferente do pensamento que é central à álgebra”. Ainda, para ajustar a novas demandas cognitivas que advém desta constatação, a referência diz: “Enquanto a aritmética focaliza em números e respostas numéricas, a álgebra escolar focaliza relações”. Isto corrobora a percepção de que o fato da matemática formal do pensamento abstrato das relações matemáticas “não estar em sintonia” com a compreensão do papel da aritmética dos números, prejudica a transição para o pensamento algébrico em nível escolar.

Portanto, vemos que o pensamento numérico deveria crescer de maneira contínua para desenvolver um pensamento algébrico, mantendo os significados do pensamento numérico adquirido. Uma referência importante é (Kaput, 1999) sobre “o ensino e aprendizagem da álgebra com entendimento” que advoga o desenvolvimento do pensamento algébrico na escola elementar, baseado entre outros princípios, em dois que destacamos: – de iniciar cedo, em parte construindo sobre o conhecimento informal que os alunos trazem; – de construir sobre o potencial cognitivo e linguístico existente nos alunos.

Nesta referencia, temos que “generalização e formalização”, sendo conceitos intrínsecos a atividades e pensamentos matemáticos, possuem como suas fontes essenciais no processo de aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos o **raciocínio** e a **comunicação com linguagem matemática**. A comunicação com linguagem matemática deve abranger, além da situação da própria matemática, as situações-problemas contextualizadas, que usualmente começam na aritmética e trabalham raciocínios quantitativos de grandezas que evoluem para situações de raciocínio algébrico.

A conexão entre essas fontes é especialmente problemática nos anos iniciais quando a atividade matemática é estimulada por meio de materiais concretos e atividades lúdicas, e o raciocínio por meio de comunicação com linguagem matemática não é enfatizada de forma explícita. Então, um grande problema se apresenta para os professores dos anos iniciais, o problema de desenvolver pensamentos matemáticos a partir dos materiais concretos e outros materiais didáticos que não deixam explícitas as competências curriculares.

Estas dificuldades implicam uma questão de investigação, em que se baseia o trabalho deste artigo:

“Como estimular o desenvolvimento de pensamento algébrico a partir de noções básicas da aritmética presentes nos currículos dos anos iniciais da educação básica?”

A pesquisa motivada por esta questão consistiu em analisar qualitativamente uma coleção de livros didáticos da Matemática de Singapura para os anos iniciais, sistematizada na forma de um texto (Dotti, 2017) acessível para os professores que atuam nos anos iniciais do ensino básico, apoiando a aprendizagem dos professores no ensino de matemática em nível elementar.

### 3. Materiais Didáticos e Formação de Professores

Diversos países e seus currículos se dedicam à questão destacada acima, desenvolvendo material didático para uso na sala de aula, que tenha como objetivo primordial o desenvolvimento de pensamento matemático dos alunos, planejando cuidadosa e coerentemente o currículo escolar. Para que o material didático atinja este objetivo, os professores do ensino básico precisam conhecer profundamente o seu conteúdo, tanto sob ponto de vista de significado conceitual como de metodologias adequadas, diversificadas e sequenciadas para promover a aprendizagem significativa dos alunos. É o conhecimento pedagógico de conteúdo (Shulman, 1986), necessário para o professor aprender a ensinar.

Isto quer dizer que os livros didáticos e suas guias para professor são fonte de aprimoramento profissional, constituindo em instrumentos de aprendizagem para quem não estudou a matemática de nível superior, dos professores de anos finais da educação básica.

Neste sentido, é notório o movimento nos países que desenham seus currículos de matemática dos anos iniciais em torno da Resolução de Problemas que trabalha, junto com as competências de linguagem e comunicação, a construção de significados dos conceitos, as técnicas algorítmicas e operacionais, desenvolvimento da capacidade de propor estratégias e compreender as dos outros, investigar a validação de soluções e suas extensões. São itens do desenvolvimento de raciocínio matemático. Japão, Coreia do Sul, Singapura são alguns países que podemos citar pela qualidade excelente de seus livros didáticos escolares, com o enfoque mencionado. Em especial, a abordagem do pensamento algébrico a partir da aritmética dos anos iniciais que respeita a trajetória de material concreto, seguida de representação pictórica antes da abstração com linguagem simbólica, é observada consistentemente em livros do Japão como (Isoda, Murata & Yap, 2017) e da Singapura (Kheong, Ramakrishnan & Wah, 2007), disponibilizados traduzidos em inglês. A publicação (Cedillo & Isoda, 2013), em espanhol, de guia para aprendizagem e ensino de aritmética, geometria e medição, é um exemplo representativo do material eficaz para curso de formação inicial e continuada de professores dos anos elementares, baseada em textos didáticos (Isoda & Cedillo, 2012), que é tradução para espanhol da edição anterior de 2005, da coleção japonesa que está revisada e atualizada como (Isoda et al., 2017). O guia (Cedillo & Isoda, 2013) vai além de simples orientação das atividades para uso em sala de aula, ele representa um material para a formação de professores dos anos iniciais, por incluir uma análise dos conceitos trabalhados na coleção didática que o acompanha, com reflexões que acompanham a progressão curricular do conteúdo e sugestões metodológicas. Outros países como Tailândia, Chile, Costa Rica também trabalham seus currículos de forma-

ção de professores em torno da capacitação em ensino de matemática com enfoque de resolução de problemas que promovem o desenvolvimento do pensamento matemático.

A coleção (Kheong et al, 2007) da Singapura é a coleção escolhida pelo projeto de investigação em que se baseia este trabalho. Existem semelhanças entre livros japoneses e esta coleção, no que se refere a uso de modelos pictóricos para trabalhar a transição do material concreto para representação simbólica da aritmética e logo, a exploração das estruturas algébricas da aritmética. A escolha da coleção da Singapura para trabalhar com uma professora de anos iniciais se deve ao Modelo de Barras, característico da Matemática de Singapura, e à abordagem amigável e atenciosa em detalhes sutis que facilitam a análise por professores dos pontos e momentos críticos em que se evidenciam os avanços no pensamento algébrico. Por outro lado, na coleção japonesa percebemos uma introdução precoce, já a partir do 3º ano, da representação de números na reta numérica, uma abordagem defendida por (Wu, 2009), em paralelo com o modelo pictórico, que consideramos adequado, porém sofisticada para trabalhar ainda mais uma representação abstrata e técnica da matemática, que na coleção da Singapura é adiada sem prejuízo de rigor. A abordagem da coleção da Singapura é, nesse sentido, intuitiva e amigável, o que facilitou a análise pela professora, pedagoga de formação, no seu trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática. No cenário educacional do Brasil que enfrenta atualmente uma fase de implementação da Base Nacional Comum Curricular, uma abordagem facilitada do conteúdo matemático dos anos elementares contribui para o aperfeiçoamento dos professores em exercício. Apesar desta menção ao contexto do país Brasil, cabe ressaltar que a questão motivadora investigada neste trabalho se enquadra dentro da perspectiva global de pesquisa em Educação Matemática, sobre o tema de Ensino e Aprendizagem da Álgebra desde os anos elementares do ensino fundamental. (Kaput, 1999), (Kieran, 1992), (Kilpatrick et al, 2001).

Este trabalho tem como objetivo contribuir para a formação de professores não especialistas de matemática nos anos iniciais da educação básica, que são agentes fundamentais no desenvolvimento do raciocínio algébrico dos alunos antes desses chegarem à fase da pré- álgebra, quando os professores com formação específica em matemática precisam trabalhar a transição para a algebrização.

A metodologia adotada no trabalho (Dotti, 2017) foi de análise qualitativa das atividades de livros de cada ano escolar da coleção selecionada, detectando os momentos críticos em que o raciocínio algébrico avança conforme a estrutura organizada da Matemática, com atenção especial para o uso pedagógico do Modelo de Barras na introdução de conceitos, facilitação de representação simbólica e modelagem matemática de problemas contextualizados.

Os exemplos que ilustram este trabalho são da Coleção "My Pals are Here!" (Kheong et al, 2007) com autorização concedida pela editora Marshall Cavendish Education, Singapore. A análise dos exemplos foi conduzida com objetivo de compreender como uma sequencia concebida cuidadosamente numa coleção didática pode percorrer a trajetória de aprendizagem e amadurecimento dos conceitos e procedimentos matemáticos que desenvolvem o raciocínio algébrico, como esperado nos currículos dos anos iniciais do ensino básico.

## 4. Exemplos da Matemática de Singapura e uma análise qualitativa

Nesta seção, apresentamos exemplos mais contundentes dos momentos em que a análise das atividades apontou o avanço no pensamento algébrico, sem esgotar o trabalho de investigação realizada em (Dotti, 2017). Para limitar o foco da discussão, não vamos neste texto discutir as características essenciais da Matemática de Singapura que atraem a atenção em nível global, mas sim concentrar no papel do modelo pictórico no desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais. Para conhecer estudos da Matemática de Singapura nos Estados Unidos, em que as características importantes da mesma podem ser encontradas, nos referimos a (Ginsburg, Leinwand, & Anstrom, 2005), (Hoven & Garelick, 2007), (Leinwand & Ginsburg, 2007).

No trabalho da nossa pesquisa, destacamos o papel mediador do Modelo de Barras na passagem da “construção de conceitos matemáticos por manipulação do material concreto” para a “abstração da representação simbólica dos conceitos”, por meio de representação pictórica no processo de abstração.

No primeiro livro, destinado aos alunos do 1º ano (6 anos de idade), os estudos se iniciam com a contagem do 1 ao 10, primeiro com a contagem de objetos e a representação de cada quantidade por número que corresponde a um numeral decimal correspondente, como é usual em livros didáticos em geral. Nas atividades de contagem de objetos representados nas figuras e a escrita/leitura do número que representa a quantidade, o aluno exercita o primeiro registro com símbolos matemáticos e o conceito de 0, correspondendo à ausência de quantidade.

O aluno também é apresentado a um objeto especial, um material cúbico que se encaixa um ao outro por extremidades. Cada peça representa uma “unidade” na contagem.

Nas atividades diversas de contagem de objetos, a ideia fundamental de “comparação” entre as quantidades é trabalhada por meio da contagem de agrupamentos de quantidades distintas, introduzindo o conceito de “mais que”, “menos que”, “igual” entre as quantidades de unidades em diferentes agrupamentos, e logo abstraído para o conceito de ordem nos números inteiros positivos. Em seguida, o conceito básico de “partes” de um número (ainda até 10) é intensamente trabalhado dentro de atividades de decomposição, sejam lúdicas ou não. Notamos então as ideias de “parte-todo” e “comparação” que permeiam a Matemática de Singapura sendo iniciadas desde as primeiras atividades.

Essas ideias fundamentais já se conectam com “relações” entre números, uma ideia algébrica. As diferentes possibilidades de decomposição de um número são exercitadas por meio de junção de peças formando uma barra que representa a quantidade correspondente ao número inicial. Foi analisado que a visualização e a manipulação de objetos com formato de barras facilitam a representação pictórica de quantidades, generalizadas por meio do Modelo de Barras, nos anos seguintes.

A Figura 1 a seguir ilustra uma atividade do 1º ano que aproveita o conceito de composição e decomposição de um número, em que percebemos a ideia algébrica que prepara o conceito de equação (igualdade entre números, no caso), assim como o raciocínio de diversas possibilidades de decomposição que traz a ideia de variabilidade

e prepara as ideias de incógnita numa equação em contexto de anos posteriores. O exercício da Figura 1 consiste de uma proposta para decompor o número 7 de várias maneiras e usar a “balança” para compreender o significado de comparação e igualdade. Atividades planejadas com claros objetivos curriculares permeiam esta proposta.

3 Carry out this activity.

a Make number bonds with a maths balance.

3 and 4 make 7.

b What other numbers make 7??

Explain to your child that placing the weights at the number 7 on both sides of the balance will give

24

Figura 1: Pág 24 Livro 1A © Marshall Cavendish Education. Adapted with permission.

Ainda neste exercício percebe-se a preparação do pensamento sobre o princípio da adição, mesmo antes de introduzir a operação de adição e seu algoritmo. É interessante também observar no final do exercício, a proposta de uma situação desafio, em que se considera a situação de colocar o 7 em ambos os lados, estimulando assim o aluno a considerar que o 7 (todo) pode ser comparado com o próprio 7 (parte), logo 7 se decompõe com as partes 7 e 0, em que 0 representa o “nada” para a criança, o futuro conceito de “elemento neutro” da adição.

Na Figura 2 a seguir, o conceito de “decomposição de um número em partes” retorna numa atividade lúdica.

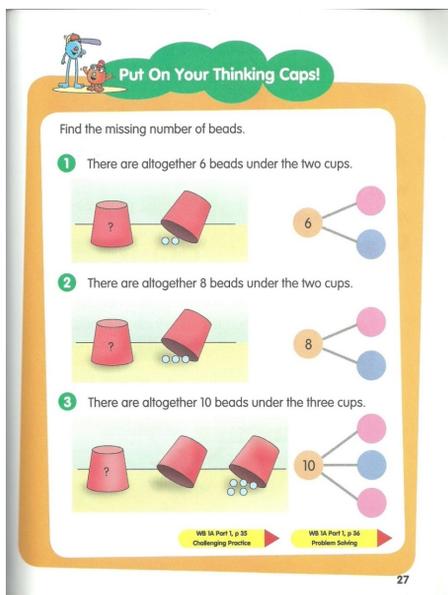


Figura 2: Página 27 do livro 1A© Marshall Cavendish Education. Adapted with permission.

Observamos nesta atividade uma proposta inteligente de estimular o pensamento algébrico num raciocínio de operação inversa dentro de uma situação de princípio aditivo, estudado nas atividades de decomposição de números. Isto é, no jogo de dois baldes, sabendo-se o “todo”, por exemplo, 6 bolinhas ao todo no primeiro item, indicado na página como caso 1, observando-se a ilustração em que quando o balde da direita é levantado 2 bolinhas são vistas, o aluno deverá adivinhar quantas bolinhas estão debaixo do balde à esquerda, e representar a situação simbolicamente no diagrama ao lado da figura. Trabalha-se a ideia de subtração como operação dual na situação de decomposição, ao mesmo tempo que estimula o raciocínio algébrico com a noção de “incógnita” numa situação de equação que será necessário identificar nos anos finais do ensino fundamental. No segundo caso, consolida-se o raciocínio, quando o todo é dado como 8 bolinhas e o balde da direita apresenta 3 bolinhas. Notamos ainda que este exercício, mais uma vez, trabalha o conceito do número 0 na última ilustração, o caso 3, em que não há nenhuma bolinha debaixo do baldinho do meio, e reforça-se a ideia de 0 como o elemento neutro na adição, quando o aluno deverá representar a situação desta decomposição simbolicamente, completando o diagrama à direita.

A aritmética é retomada com os números até 20, repetindo o ciclo de exercícios de contagem de objetos, a partir do número 10, formando os números de 11 a 20. A técnica de decomposição é retomada com esses números de diversas formas, incluindo uma proposta adicional de que fixe uma das partes da decomposição como 10, para facilitar a introdução da representação decimal e seu significado na representação posicional, pois a outra parte restante resgata o conhecimento consolidado até então, reconhecendo as unidades até 9 na representação posicional. A professora pedagoga compreendeu nesta atividade a proposta de consolidar a ideia de “dezena” como ingrediente essencial no sistema de representação decimal posicional dos números, e o modelo de barras,

desenhando as “peças unidade” juntadas, antecede mesmo a introdução de material padronizado como o material dourado.

A Figura 3 abaixo ilustra a página do Guia do professor de uma atividade, ainda para o 1º ano, da integração das diferentes linguagens de representação no trabalho com a técnica de subtração, onde é possível ver o algoritmo sendo trabalhado com significado mediado por modelo pictórico, material concreto se necessário, e a organização do registro da operação aritmética. As páginas do Guia do professor contêm orientações sobre possibilidades de condução na sala de aula, com sugestões de questionamentos ou de desdobramentos possíveis.

**Additional Activity**  
Get pupils to work in pairs.  
Show the following model.

Get them to study the model and write an addition story based on the model.

**Instructional Procedure**

- Note that this question applies the ‘comparing’ concept in subtraction.
- Use unit cubes to demonstrate while reading and explaining the problem to pupils.
- Show that Mohan has a set of 14 cubes and that it is 11 cubes more than Neesha’s set of cubes.
- Place the smaller set of cubes below the other for a clearer visual comparison.
- Point out that 11 less than 14 is 3.
- Explain to pupils that this is a subtraction problem and not an addition problem although the term ‘higher’ is used in the question.
- Assess pupils’ ability to solve a similar problem. Provide pupils with cubes to work on if necessary.
- Get pupils to read the problem and then use cubes to model after the word problem statements.
- Then get them to fill in the unknown values to complete the solution.

4 Mohan lives on the 14th floor. He lives 11 floors higher than Neesha. On what floor does Neesha live?

We can use to show the floor on which they live.

Mohan 14  
Neesha 3  
14 - 11 = 3  
Neesha lives on the 3rd floor.

4 Googol makes 20 chicken pies for a party. He makes 6 more chicken pies than Hulling. How many chicken pies does Hulling make?

Googol 20  
Hulling 14  
20 - 6 = 14  
Hulling makes 14 chicken pies.

Figura 3: Pág 82 do Guia do Professor 1B © Marshall Cavendish Education.  
Adapted with permission

Percebemos que o conceito de operações iniciais de adição/subtração se processa concomitantemente com o próprio conceito de números e suas representações, trabalhando a dinâmica das operações dentro do conceito de decomposição de um número em suas partes (parte-todo) e comparações.

O projeto de investigação analisou todos os anos da coleção e o seu estudo pode ser consultado em (Dotti, 2017). Neste artigo, ressaltamos que é no livro do 2º ano que detectamos um passo decisivo no processo de abstração para o raciocínio algébrico, que conecta a parte elementar de visualização de objetos concretos do cotidiano à linguagem de representação por modelo de barras, que por sua vez, permite estender, por abstração, o conceito de números que representam quantidades discretas ao conceito de outros “números”, que aparecerão em contextos de quantidades de naturezas

distintas, por exemplo, frações e números decimais ainda nos anos da escola elementar, e depois números racionais e reais nos anos finais do ensino fundamental.

O exemplo- chave neste ponto de salto cognitivo que julgamos apropriado destacar aparece na página 60 do livro 2A.

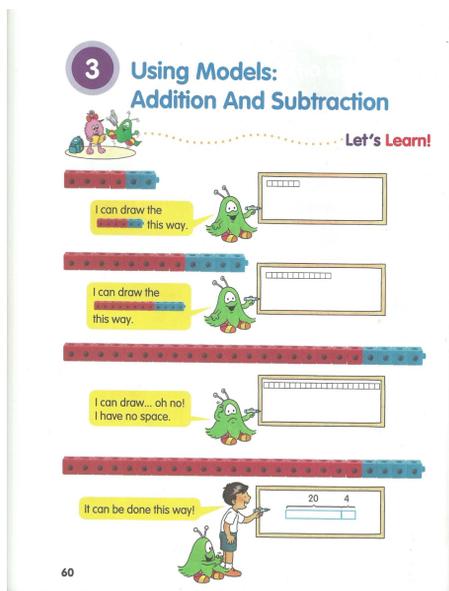


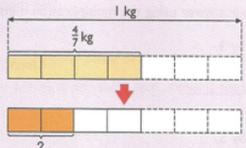
Figura 4: Página 60 do livro 2A© Marshall Cavendish Education. Adapted with permission

Este exemplo mostra uma situação problema de limitação do material concreto para representar as barras com quantidade grande de “peças unidade”, cujo registro na lousa ou folha de papel (também espaços limitados) estaria dificultado. Um diálogo dos personagens dentro da atividade leva à estratégia de “desenhar” (modelizar) uma barra de tamanho qualquer que “represente” a quantidade desejada, e que o modelo tenha as “informações” (dados) que representem as “relações” entre as quantidades, rompendo neste ponto a barreira de dependência de objeto concreto para manipular, mas visualizar modelos pictóricos para compreender situações problema, sejam essas da própria matemática ou aplicações em problemas contextualizados. O Modelo de Barras apresenta um forte poder pedagógico especialmente na resolução de problemas, quando permite visualização de dados com suas propriedades matemáticas e “relações” algébricas (álgebra da aritmética) como passagem segura para a fase da pré-álgebra.

Um exemplo que estende o conceito parte-todo e comparação num problema que trabalha frações para 5º ano, é ilustrado na Figura 5.

3 A  $\frac{4}{7}$ -kg watermelon is cut into 2 equal pieces. What is the mass of each piece of watermelon?

**Method 1**



From the model, we see that the mass of each piece of watermelon is  $\frac{2}{7}$  kg.

**Method 2**

$$\frac{4}{7} \div 2 = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{7} \text{ kg}$$

The mass of each piece of watermelon is  $\frac{2}{7}$  kg.



Figura 5: Página 121 do livro 5 A © Marshall Cavendish Education. Adapted with permission.

O enunciado do problema diz: “Uma melancia de  $\frac{4}{7}$  kg é cortada em duas partes iguais. Qual é a massa de cada pedaço de melancia?”.

A atividade no livro trabalha dois métodos de resolução, o primeiro com modelo de barras, e o segundo sistematizado com a técnica de operações com números fracionários. O modelo de barras representa claramente as etapas da resolução de problemas, permitindo justificar e validar o raciocínio, estimulando a interpretação dos dados e a comunicação do raciocínio matemático. No modelo pictórico, o todo (unidade de medida de massa 1kg) é considerado para resgatar o significado da “unidade fracionária  $\frac{1}{7}$ ” como conhecimento prévio, de modo que as 4 unidades fracionárias representam a massa da melancia, e logo, a metade da massa da melancia, solicitada pelo problema, é representada como metade de 4 unidades do modelo pictórico, obtendo-se claramente a resposta  $\frac{2}{7}$ kg como a massa de cada pedaço. O segundo método sintetiza a parte operatória e consolida o significado da divisão entre frações como o produto da primeira fração pelo inverso do segundo, com compreensão da álgebra das operações no campo dos números fracionários, e sem regras memorizadas mecanicamente. Ambos métodos correspondem a habilidades requeridas na aprendizagem da matemática nos anos iniciais.

No início do 6<sup>o</sup> ano o desenvolvimento do raciocínio algébrico, aliado ao domínio de procedimentos operacionais facilitados pelas representações com o Modelo de Barras, permite introduzir a representação de incógnitas por letras, com significados para as operações literais em contextos próprios de linguagem matemática ou em problemas contextualizados.

## Conclusão

O trabalho desenvolvido em (Dotti, 2017) mostrou-se consistente para poder concluir que a análise das atividades, com olhar atento sobre o significado e o papel das mesmas dentro do fluxo do currículo escolar, permite ao professor dos anos iniciais

uma aprendizagem de como promover o desenvolvimento do pensamento algébrico, com abordagem confortável e coerente dos conteúdos do currículo escolar, segundo as competências desejadas. Consideramos que o projeto de investigação deste trabalho, do ensino e aprendizagem da álgebra desde os anos iniciais, apresentou resultados desejados de contribuir com um texto que auxilie a compreensão dos professores dos anos iniciais sobre o tema do pensamento algébrico, e fundamentação para ampliar o campo de investigação sobre as conexões de outros temas do ensino dos anos iniciais com o ensino dos anos finais, para haver a desejada integração da matemática escolar com a matemática que os estudantes precisam saber. A coleção estudada mostrou possibilidades de analisar evidências para outros temas.

**Agradecimentos:** Agradecemos o apoio da Marshall Cavendish Education pela permissão concedida para usar sua publicação e algumas páginas nos resultados do projeto e sua divulgação.

## Referencias

- BRASIL (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática* | Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF
- BRASIL (2017). *Base Nacional Comum Curricular: ensino fundamental*. Brasília: MEC/SEMTEC
- Cedillo, T. & Isoda, M. (2013). *Matemáticas para la Educación Normal. Guía para el aprendizaje y enseñanza de la aritmética, la geometría y la medición*. México: Pearson Educación.
- Dotti, T. G. P. (2017). *Um estudo do Modelos de Barras nos livros didáticos da Matemática de Singapura: fundamentação da álgebra no ensino fundamental 1º ciclo*, Dissertação de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática. São Carlos: UFSCar
- French, D. (2002). *Teaching and Learning Algebra*. London: Continuum.
- Ginsburg, A., Leinwand, S., Anstrom, T. & Pollock, E. (2005). *What the United States can learn from Singapore's World-Class Mathematics System: An Exploratory Study*. USA: American Institutes for Research.
- Hoven, J. & Garelick, B. (2007). Singapore Math: Simple or Complex? *Making Math Count*, 65(3), (28–31). USA: Educational Leadership.
- Isoda, M. & Cedillo, T. (2012). *Matemáticas para la Educación Normal, Tomos I a VI*. México: Pearson Educación. Tradução para espanhol da edição 2005 de *Study with your Friends: Mathematics for Elementary School, Volumes 1 to 6*. Tokyo: Gakko Toshō.
- Isoda, M., Murata, A. & Yap, A.I. (2017). *Study with your friends: Mathematics for Elementary School, Volumes 1 to 6. 2nd Printing of New Edition*. Tokyo: Gakko Toshō.
- Kaput, J. (1999) *Teaching and Learning a New Algebra with Understanding*. National Centre for Improving Students Learning and Achievement in Mathematics and Science. USA: Dartmouth.
- Kheong, F.H., Ramakrishnan, C. & Wah, B.L.P. (2007). *My Pals are Here!* Singapore: Marshall Cavendish International.

- Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. Grouws (Ed) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp 3–34). New York: McMillan
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding Up: Helping children learn mathematics*. Washington: The National Academies Press.
- Leinwand, S. & Ginsburg, A. (2007). Learning from Singapore. *Making Math Count*, 65(3), (32–36). USA: Educational Leadership.
- Stewart, I. (1995). *Concepts of Modern Mathematics*. NY: Dover
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), (4 –11).
- Tall, D. (2015). Setting Lesson Study within a Long-Term Framework for Learning. In Inprasitha, M. et al (Eds) *Lesson Study: Challenges in Mathematics Education*. Singapore: World Scientific.
- Vlassis, J. & Demonty, I. (2002). *Algebra taught through problems*. Université de Liège: Institut Piaget.
- Wu, H.H. (2009). *From arithmetic to algebra*. Oregon: Eugene University.