

Qué enseñar sobre un tema de matemática escolar y cómo enseñarlo: elementos clave en la formación docente¹

Nelly León Gómez

Universidad Pedagógica Experimental Libertador

Instituto Pedagógico de Maturín

Venezuela

nellyleong@hotmail.com

Resumen²

La principal competencia profesional que debe desarrollar el profesor de Matemática es la de ser capaz de realizar eficientemente la tarea de enseñar la disciplina. Para ello no es suficiente tener un conocimiento matemático a nivel superior, además requiere habilidades para planificar, gestionar y evaluar el contenido matemático escolar. Esta presentación se centra en algunos abordajes teóricos que plantean opciones para decidir qué enseñar sobre un tópico matemático específico y como enseñarlo, entre ellos el Mapa de Enseñanza-Aprendizaje (Orellana, 2002) y el Análisis Didáctico (Gómez, 2002), mostrando ejemplos de su utilización en temas de Cálculo y de Estadística, respectivamente.

Palabras clave

Formación docente, matemática escolar, conocimiento pedagógico del contenido, mapas de enseñanza y aprendizaje, análisis didáctico.

Abstract

The main professional competence to be developed by the mathematics teacher is to be able to efficiently perform the task of teaching the discipline. For it is not enough to have a high level of mathematical knowledge. Skills to plan, manage and evaluate the school mathematical content are also required. This presentation focuses on some theoretical approaches that pose options to decide what to teach about a specific mathematical topic and how to teach it, including the Teaching-Learning Map (Orellana, 2002) and Didactic Analysis (Gómez, 2002). Examples of their use in areas of Calculus and Statistics will be shown.

Key words

Teacher preparation, school mathematics, pedagogical content knowledge, teaching and learning maps, training analysis.

¹ Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada en la I CEMACYC, celebrada en Santo Domingo, República Dominicana el año 2013.

² El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

1 Algunas consideraciones en torno a la formación del docente de Matemática

Qué enseñar sobre un tema matemático escolar y cómo enseñarlo son referentes característicos del quehacer cotidiano del profesor que prefiguran su accionar en el aula. Ser capaces de buscar respuestas a estas interrogantes se constituye en una de las capacidades a desarrollar por el futuro docente en su proceso de formación, tanto inicial como permanente. Como parece obvio señalar, no es suficiente saber mucha matemática para ser un buen profesor de esta materia. Esta tarea requiere mucho, mucho más.

En los currículos de formación de profesores de Matemática, en los países que integran la Red de Educación Matemática y del Centro América y el Caribe, según se desprende de los informes nacionales presentados en el CANP-2012, además de los contenidos disciplinares se incluyen otros de naturaleza didáctica y pedagógica, tanto general como específica, y de formación para la práctica, en procura de desarrollar las competencias generales y específicas de la profesión docente en Matemática. No obstante, la concepción y administración curricular en muchos casos interfiere en la consecución de estos propósitos, como en el caso de Venezuela donde se evidencia una separación del currículo en tres componentes disjuntos: especializado, pedagógico y práctica profesional, que incide en una formación fragmentada y desvinculada con la práctica real (León, Beyer, Serres e Iglesias, 2012), percibiéndose la escasez de oportunidades formativas con base en la discusión del contenido matemático escolar y en la reflexión sobre lo que significa aprender a enseñar matemática desde la perspectiva de aprender una práctica (Llinares, 2008a).

Esto lleva a pensar en la conveniencia de dar un giro a esta situación y ubicar en el centro de la formación docente la reflexión sobre el contenido que es objeto de enseñanza y aprendizaje en los niveles educativos correspondientes y sobre los conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales para su debida enseñanza, comprendiendo en esta de manera global tres momentos de la acción didáctica: la planificación, la gestión y la evaluación, y dentro de la planificación, las etapas de: selección y secuenciación de contenidos, el análisis de los aspectos cognitivos inherentes al aprendizaje de los estudiantes, el diseño de tareas, experiencias de aulas y la selección de estrategias y recursos de enseñanza en función del logro de aprendizajes y el desarrollo de habilidades que configuran las competencias esperadas.

La formación teórica, se espera que vaya acompañada de experiencias de naturaleza práctica o vivencial que permitan al futuro docente apropiarse de ese conocimiento que luego deberá poner en acción en su labor del día a día. Diferentes investigaciones siguen esta línea de indagación, tanto en contextos de formación inicial de profesores de Matemática como de formación continuada, entre ellos los trabajos de Gómez (2002 y 2007), Gómez, Lupiañez, Rico y Marín (2007), Rico (2004), González y Gallardo (2006), Lupiañez y Rico (2006), con énfasis en la competencia de planificación a través del análisis didáctico; Llinares, con su línea de trabajo sobre enseñar matemáticas como una práctica (Llinares, 2000, 2008a, 2008b); los trabajos de Ball (1991), Ball, Bass, Delaney, Hill, Lewis, Phelps et. al.(2007) y Blanco Nieto y Contreras(2012) sobre el conocimiento matemático para la enseñanza, y los desarrollos de Orellana (2002) y

Ortiz, Iglesias y Paredes (2013) sobre el diseño de actividades didácticas con el uso de mapas de enseñanza y aprendizaje.

Sustentándonos en estas investigaciones nos detenemos a continuación en tres categorías fundamentales en el desarrollo ulterior de este trabajo: el *conocimiento matemático escolar*, el *conocimiento profesional* y las *competencias profesionales del profesor de Matemática*.

2 El conocimiento matemático escolar

El profesor de Matemática ha de ser un profesional matemáticamente culto con una formación disciplinar robusta (González, 2000 y 2010). Es decir, debe lograr un conocimiento matemático a un nivel superior (Rico, 2004; Moreno, 2007); pero ese saber que él adquiere es de una naturaleza diferente al de los profesionales de otras carreras como los matemáticos, ingenieros o economistas. Este es un conocimiento proyectivo, en el sentido de que no es para su uso exclusivo, sino para hacerlo llegar a otros a través de la enseñanza.

En el contexto de la didáctica francesa, el proceso de transformación del conocimiento matemático superior en un conocimiento a enseñar es lo que se denomina transposición didáctica (Chevalard, 1998). Pero, más allá del conocimiento requerido para llevar a cabo de manera exitosa tal transposición, el docente debe manejar adecuadamente las matemáticas escolares, entendiendo por estas las matemáticas como objeto de enseñanza y aprendizaje (Rico, Marín, Lupiañez y Gómez, 2008), y en consecuencia, durante su formación inicial este debe lograr un conocimiento versátil de los temas incluidos en los programas de Matemática del nivel educativo en el cual ejercerá su labor docente (primaria, secundaria, superior) que incluya las interrelaciones internas entre los diversos tópicos matemáticos y externas con otras áreas de estudio.

Los contenidos escolares oficiales en cada país se encuentran en los programas de la asignatura, generalmente como un listado organizado por áreas o componentes, sin mucho nivel de especificidad en cuanto a su alcance, el cual vendrá determinado por los objetivos que se persiguen y las competencias a desarrollar. Por ejemplo, en Venezuela los contenidos de Matemática de secundaria están organizados en tres componentes dentro del área "El ser humano y su interacción con otros componentes del ambiente", siendo estos: estudios de tendencias y situaciones; estudios de patrones, formas y diseños ambientales y estudios de modelos y estructuras matemáticas aplicadas al entorno. Las otras áreas son: Lenguaje, comunicación y cultura; ciencias sociales y ciudadanía; filosofía, ética y sociedad; educación física, deporte y recreación; y desarrollo endógeno en, por y para el trabajo liberador (MPPE, 2007).

El profesor de matemática, aun dominando los contenidos disciplinares desde un punto de vista conceptual y técnico, en muchos casos muestra limitaciones en su comprensión cuando se trata de enseñarlos en un nivel inferior para facilitar el aprendizaje de los estudiantes, es decir, cuando forma parte de las matemáticas escolares. Es por ello que Moreno (2007) sugiere que los profesores en formación deberían reflexionar sobre estas matemáticas pues ellas se constituirán en el eje central de su labor académica, por lo que, a la par que enriquece su dominio del conocimiento matemático debe brindársele

la oportunidad de “ampliar su conocimiento desde el punto de vista que debe ser enseñado y aprendido” (Moreno, 2007, p. 101), explorando la variedad de significados que los conceptos matemáticos adquieren en el ámbito de la matemática escolar.

Estos múltiples significados que se asocian a un mismo concepto vienen dados por una relación ternaria: estructuras conceptuales que los sustentan – sistemas de símbolos que los representan – objetos y fenómenos de los que surgen (Rico, 1997).

Un estudio de los significados de un concepto matemático es tarea indispensable en la planificación escolar con miras a su enseñanza y aprendizaje, constituyéndose en elemento de la formación del docente en cuanto a la adquisición del conocimiento profesional para su desempeño académico, tema que abordamos a continuación.

3 Conocimiento profesional del profesor de matemática

La tarea específica del profesor de Matemática es enseñar Matemática, para lo cual debe poseer un conocimiento matemático, no solo con el alcance de las matemáticas superiores, sino, y fundamentalmente, con el de las matemáticas escolares y su connotación didáctica. En pocas palabras, saber cómo enseñarlo. Por ello cabe preguntarse si los docentes en formación adquieren el conocimiento profesional que caracteriza a la docencia en Matemática, cuya principal dimensión es la de aprender a enseñar la disciplina y ser capaces de continuar aprendiendo para mejorar y actualizar constantemente el desempeño de su labor. Pero, ¿Cuál es ese conocimiento?.

Shulman (1996) inició el debate acerca de cuáles deben ser los conocimientos y capacidades de un profesor para realizar la tarea de enseñar de manera eficaz y eficiente, al proponer la noción de *conocimiento pedagógico del contenido matemático*, a través de la cual refuta la idea de que para enseñar un tema matemático es suficiente tener un dominio del mismo y algunas nociones sobre didáctica y pedagogía; por el contrario, argumenta que en lugar de comprender el contenido para sí mismo el profesor debe ser capaz de descifrar el contenido matemático en nuevas formas, reorganizarlo, secuenciarlo y presentarlo a través de actividades y ejemplos que despierten la atención del estudiante y le faciliten su aprendizaje.

El conocimiento pedagógico del contenido se refiere, entonces, al conocimiento especializado que es propio del docente y que lo distingue de otro que posee el conocimiento matemático pero que no pretende enseñarlo. Según Shulman, este incluye conocimiento del contenido, contenido pedagógico y conocimiento pedagógico del contenido, siendo este último una forma de conocimiento práctico que es empleado por los docentes para guiar sus acciones en situaciones de clase altamente contextualizadas.

Pero, ¿qué aprendizajes debe lograr el profesor de Matemática en formación para lograr esa comprensión del conocimiento matemático?, ¿qué capacidades y conocimientos debe lograr para ejecutar exitosamente las acciones de planificar, gestionar y evaluar la acción docente? y ¿cómo se logra ese aprendizaje?. Gómez (2007, p.110) apunta que la formación del docente “debería pasar de preocuparse por desarrollar en los futuros profesores estrategias para convertir en pedagógico un contenido que supuestamente no lo es, a reconocer el carácter eminentemente pedagógico de ese contenido”.

Ball, Bass, Delaney, Hill, Lewis, Phelps, et al (2007), en su teoría *Matemática para la enseñanza*, sugieren cuatro categorías para el conocimiento del profesor que surgen del análisis de la práctica: Conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido, conocimiento del contenido y del estudiante y conocimiento del contenido y de la enseñanza

Según se observa en la tabla 1, en las dos últimas categorías se manifiesta claramente la interrelación entre el contenido y la enseñanza y el aprendizaje; es decir, el conocimiento del aprendizaje y de la enseñanza en función del contenido.

En esta misma línea de pensamiento Gómez (2007), más allá de concebir el conocimiento pedagógico del contenido como aquel que permite la transformación de un contenido para ser transmitido, desde una posición constructivista y una visión funcional, lo toma como los conocimientos y habilidades necesarios para diseñar y gestionar actividades de enseñanza y aprendizaje y se refiere al conocimiento didáctico como aquel necesario para realizar el *análisis didáctico* de un tema matemático –al cual nos referiremos más adelante– como proceso dentro de la planificación local de una unidad didáctica o una clase de Matemática.

Precisamente, la planificación es una de las competencias profesionales del profesor. Ahora bien, ¿cuáles son esas competencias que el futuro docente debe desarrollar durante su formación inicial y posteriormente a lo largo de su desarrollo profesional?.

Tabla 1
Categorías para el conocimiento del profesor dentro de la teoría
Matemática para la Enseñanza

Categoría	Conceptualización	Capacidades del profesor
Conocimiento común del contenido	Conocimientos y habilidades matemáticas que se espera en cualquier adulto educado	<ul style="list-style-type: none"> ■ Reconocer respuestas erradas ■ Identificar definiciones no exactas en libros de texto ■ Utilizar correctamente la notación ■ Realizar las tareas que asignan a los estudiantes
Conocimiento especializado del contenido	Conocimientos y habilidades que requiere el profesor en su trabajo, más allá del conocimiento común	<ul style="list-style-type: none"> ■ Analizar los errores de los estudiantes ■ Argumentar matemáticamente ■ Usar representaciones matemáticas ■ Comunicarse correctamente con el lenguaje matemático.

Conocimiento del contenido y de los estudiantes	Conocimientos sobre el aprendizaje y las dificultades de los estudiantes en función del contenido	<ul style="list-style-type: none"> ■ Anticipar errores y concepciones erradas comunes en los estudiantes ■ Interpretar el pensamiento incompleto de los estudiantes ■ Predecir la actuación de los estudiantes ante las tareas matemáticas.
Conocimiento del contenido y de la enseñanza	Conocimiento de la enseñanza en función de los contenidos	<ul style="list-style-type: none"> ■ Diseñar recursos didácticos ■ Reconocer las ventajas y desventajas de las diferentes representaciones de los conceptos ■ Enfatizar cuestiones relevantes en las actuaciones de los estudiantes.

4 Competencias profesionales del profesor de Matemática

La noción de competencia involucra la realización de una tarea o actividad y la puesta en juego de unas capacidades que involucran conocimientos, habilidades y actitudes. Dentro de las competencias del profesor de Matemática hay algunas de carácter general y otras de naturaleza específica.

En los lineamientos curriculares en Colombia, al referirse a estas competencias profesionales se alude al reconocimiento de los estudiantes en sus diferentes dimensiones, el diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje, la gestión de proyectos institucionales, entre otros asuntos. (Guacaneme, Obando, Garzón y Villa-Ochoa, 2012).

En la propuesta de modificación curricular que actualmente se lleva a cabo en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) en Venezuela, entre las competencias específicas del profesor de Matemática se señala que el docente al egresar de su formación inicial:

- Asume proyectos de investigación utilizando diferentes enfoques teóricos y metodológicos propios de la Educación Matemática.
- Valora los antecedentes históricos de la producción científica especialmente aquellos vinculados al desarrollo de la Matemática y de la Educación Matemática con el fin de orientar sus dimensiones filosóficas, históricas, humanas, sociales, didácticas y científicas.
- Diseña, aplica y evalúa unidades didácticas con contenido matemático.
- Crea nuevos escenarios para la enseñanza de la Matemática apoyados en recursos diversos de TIC mediante la planificación, diseño y evaluación de estrategias que combinen la presencialidad y la virtualidad.
- Comunica, en forma efectiva, ideas y resultados de la investigación en Educación Matemática, en forma oral o escrita, haciendo uso del lenguaje tanto natural como matemático.

- Domina conceptual, procedimental y actitudinalmente los saberes que le son propios a la Matemática y que permiten su desarrollo como disciplina, indispensable para el ejercicio óptimo de su profesión.
- Desarrolla el pensamiento lógico, crítico y creativo a través del planteamiento y resolución de problemas matemáticos mediante estrategias cognitivas y metacognitivas. (UPEL-Comisión de Currículum de Pregrado,s/f).

Por su parte, Llinares (2008b), enfatiza la necesidad de orientar la formación hacia la preparación para hacer algo (enseñar matemática) de manera competente, lo cual propone lograr a través de lo que él denomina sistemas de actividad:

- Analizar, diagnosticar y dotar de significado a las producciones matemáticas de los estudiantes y compararlas con lo esperado.
- Planificar y organizar el contenido matemático para enseñarlo.
- Determinar planes de acción (situaciones didácticas, ingeniería didáctica, transposición didáctica, organizadores curriculares)
- Gestionar el contenido matemático en el aula.

En el ámbito de la comunidad europea se han establecido algunas competencias generales como:

- Dominio de los contenidos matemáticos desde una perspectiva superior y su conocimiento como objeto de enseñanza y aprendizaje.
- Dominio de la organización curricular y planificación de los contenidos para la enseñanza.
- Capacidad para el análisis, interpretación y evaluación de los alumnos a partir de sus actuaciones.
- Capacidad de gestión del conocimiento matemático en el aula. (Gómez, Lupiañez, Rico, Marín, 2007).

Como vemos, algunas de las competencias planteadas desde diferentes ámbitos son coincidentes, entre ellas la de planificación a través de la cual se puede buscar alternativas de respuestas a las interrogantes planteadas en el título de este trabajo: ¿Qué enseñar de un tema matemático? y ¿Cómo enseñarlo?. Entre ellas revisaremos el Mapa de Enseñanza y Aprendizaje propuesto por Orellana (2002) y el Análisis Didáctico de Gómez (2002).

5 Mapa de Enseñanza y Aprendizaje de un tópico o tema Matemático

Orellana (2002) ha concebido un recurso para la planificación de una unidad didáctica correspondiente a un tema matemático específico al cual denomina Mapa de Enseñanza-Aprendizaje (MEA). este se construye a partir de un análisis de dicho tema en correspondencia con el nivel educativo en que se desarrollará, el conocimiento del docente sobre dicho contenido, el conocimiento previo de los estudiantes, el tiempo disponible y los intereses tanto de estudiantes como del profesor.

Los elementos que Orellana incluye en el MEA son:

- Fundamentos matemáticos (Definiciones, conceptos, teoremas, corolarios, ejercicios)
- Interrelación con otros temas matemáticos (Problemas integrales), y con el mundo real (modelación).
- Exploración analítica y gráfica, tanto en forma manual como con el uso de la tecnología, previa a la formalización de conceptos.
- Desarrollo histórico del tópic y su utilización para recrear el proceso seguido por los matemáticos en el contexto que le dio origen y a manera de motivación hacia su estudio
- Generalización de los conceptos estudiados.

Además prevé la inclusión de otros elementos de naturaleza didáctica como las estrategias y recursos para la enseñanza y el aprendizaje del tema tratado (Ver figura 1).

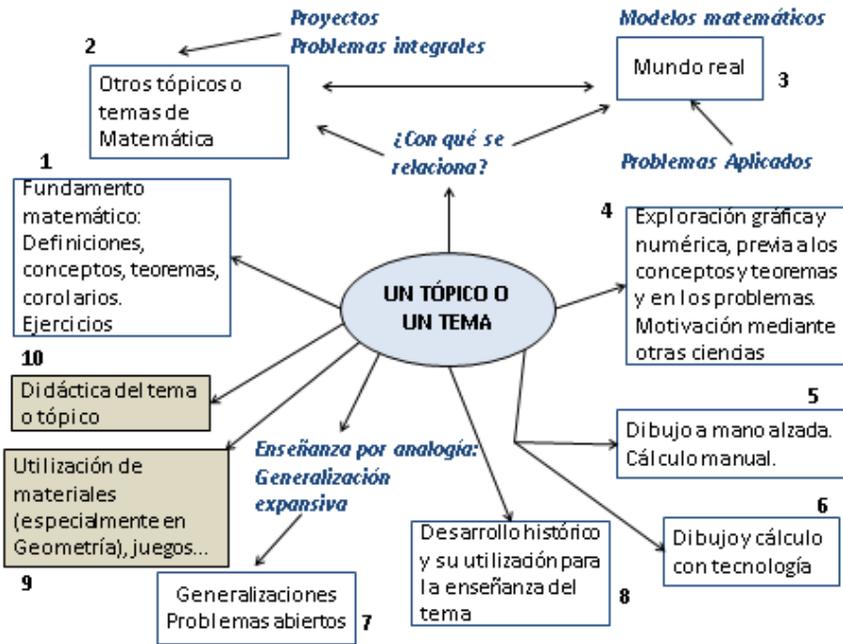


Figura 1: Mapa Enseñanza-Aprendizaje (Orellana, 2002)

Según se puede observar, la enseñanza tradicional se reduce al cuadro 1 que hace referencia a una concepción netamente deductiva lineal de la presentación de los temas matemáticos:

“definición → teoremas (enunciado) → demostración → consecuencias → ejercicios” (p. 26).

Aclara el autor que este esquema no corresponde necesariamente al orden histórico de creación de dicho conocimiento, ni es en todo caso recomendable como organización didáctica a seguir, sobre todo en los niveles de educación primaria y secundaria.

En el resto de las tablas el autor incorpora elementos que concuerdan con las diversas tendencias que en la actualidad orientan el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Font, s/f). Igualmente se vinculan con los organizadores curriculares establecidos por Rico(1997) y entendidos como conocimientos que se convierten en componentes fundamentales en el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas. Ortiz, Iglesias y Paredes (2013) han establecido esta última relación como queda reflejado en el figura 2

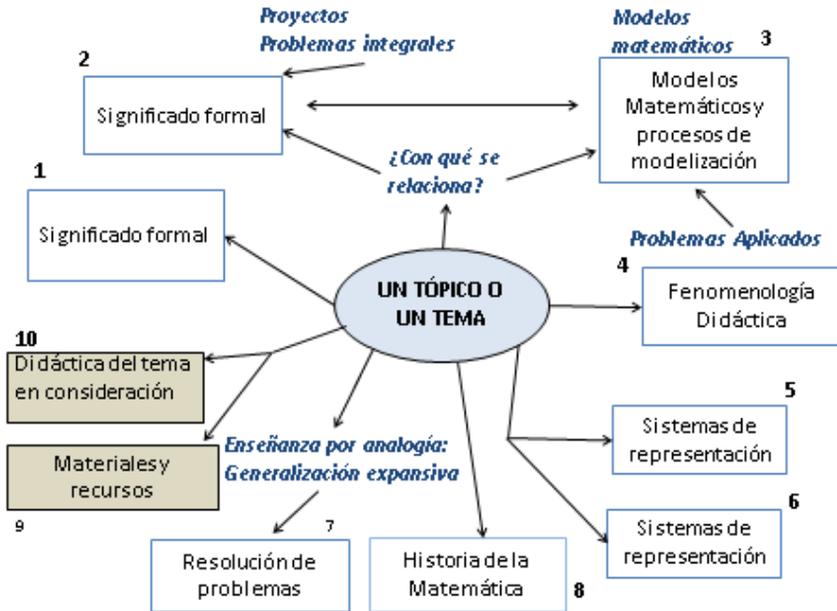


Figura 2: Relación entre los organizadores curriculares y el MEA

Siguiendo la línea de indagación sobre la organización del contenido a enseñar a través de mapas de enseñanza y aprendizaje, hemos dirigido algunas investigaciones realizadas en el marco de la maestría en Enseñanza de la Matemática que ofrece la UPEL en el Instituto Pedagógico de Maturín, dos de las cuales reseñamos a continuación.

Situándose en el curso de Cálculo Diferencial del programa de formación de profesores de Matemática para la educación secundaria, se ensayó el uso de un MEA sobre el tópico de la derivada de una función. Bara (2012), autor de la investigación, partiendo de un diagnóstico de los conocimientos previos de los estudiantes y de las dificultades que con más frecuencia se les presentan a estos en la comprensión del tema, elaboró el MEA que se muestra en la figura 3.



Figura 3: Mapa de Enseñanza y Aprendizaje sobre la derivada de una función
Tomado de Bara (2012, p. 38)

El autor explica los componentes de este MEA en los siguientes términos: la tabla 1 representa la parte teórica que se incluye comúnmente en los cursos donde se enseña la derivada. Sugiere que el estudio de este tema se inicie a partir de la tabla 8 con el uso de la historia para la comprensión de las primeras ideas del concepto de recta tangente, "ya que los problemas típicos que dieron origen al Cálculo Infinitesimal comenzaron a plantearse en el siglo III a.c. encontrándose métodos sistemáticos de resolución veinte siglos más tarde gracias a Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). En este sentido se acredita a estos dos hombres la invención del Cálculo Diferencial (p. 39).

La tabla 2 evidencia la interconexión de la derivada con otros temas matemáticos que sirven para facilitar la comprensión de este concepto. Señala el autor que se puede introducir el estudio de recta tangente a una circunferencia en un punto, previo al de recta tangente a una función en un punto, "porque esta idea ya se ha manejado en bachillerato y les resulta mucho más familiar a los estudiantes" (p. 40), luego se pasa al estudio de las rectas secante, tangente y normal al figura de una curva, como antesala de la definición de derivada.

La tabla 3 del MEA propone otra forma de aproximarse al concepto de derivada a través del estudio de la velocidad instantánea, noción fundamental a la Física, donde a través de la velocidad promedio y el uso del límite se llega a la fórmula de velocidad

instantánea. En este apartado se puede aprovechar el concepto recién estudiado para hablar sobre la paradoja de la flecha que fue resuelta gracias al Cálculo Diferencial. (p. 43)

Según Bara, cualquier estudio de las derivadas estaría incompleto si no se consideran los problemas de optimización, pues estos atienden a una inmensa gama de aplicaciones que rodean al Cálculo Diferencial. “Problemas clásicos como el de la caja sin tapa, que consiste en recortar cuadrados congruentes en las esquinas de una hoja rectangular para formar una caja (paralelepípedo) sin tapa de mayor volumen, puede realizarse utilizando materiales concretos para que los estudiantes puedan “palpar” la situación y comprender mejor el problema para así resolverlo” (p. 43).

Por último, es conveniente apoyar la enseñanza y el aprendizaje del tema de la derivada de una función con el uso de algún software como el DERIVE que facilita el cálculo de derivadas y la graficación de curvas, sin obviar los cálculos manuales y figuras a mano alzada, entre otros tareas inherentes al tópico estudiado. Igualmente se utilizaron otros medios tecnológicos como Internet para la búsqueda de información y la creación de un blog donde se colgaron videos relacionados con la historia del cálculo diferencial, el estudio de la derivada y algunas tareas propuestas por el docente.

La enseñanza del tema, siguiendo la planificación recogida en el MEA, se realizó en un lapso de 6 semanas en el horario regular, con algunas clases extra según la disponibilidad del laboratorio de computación. “Lograr concatenar en el aula todas las tablas que conforman el MEA, se tradujo en una clase evidentemente muy rica en contenidos y con una diversidad de estrategias metodológicas que causaron un impacto positivo en los estudiantes, al desligarse de ese paradigma tradicional de enseñanza que en muchos casos genera reacciones adversas en los alumnos” (p.44). Producto del registro de las situaciones ocurridas en clase y de las opiniones de los estudiantes respecto a esta propuesta de organización temática y su ejecución, se arribó a las siguientes categorías positivas: Innovación en la enseñanza; creatividad de los estudiantes y capacidad para relacionar el tema con contenidos intra y extra matemáticos; motivación por el uso de la tecnología y el conocimiento de algunos elementos de la historia del cálculo infinitesimal; clase participativa; y como rasgo negativo, la intención de los estudiantes de usar solo el programa Derive para la resolución de ejercicios y problemas, tratando de obviar el trabajo manual básico en la comprensión del tema.(Bara, 2012)

Es de hacer notar que, como el mismo Orellana (2002) lo señala, el mapa de enseñanza y aprendizaje no es único para un tema determinado. En el año 2011, bajo nuestra tutoría, la profesora Amelia Malavé realizó un estudio con el propósito de conocer la actitud hacia la Matemática de los estudiantes de la universidad politécnica donde se desempeña, encontrando una actitud negativa, de rechazo hacia esta disciplina y su aprendizaje. (Malavé, 2011). En busca de acciones para tratar de modificar tales actitudes, se decidió el uso de MEAs también en el curso de Cálculo Diferencial. Entre ellos la investigadora organizó uno para el tema de la derivada, el cual quedó diseñado como se muestra en el figura 4.



Figura 4: Mapa de enseñanza y aprendizaje para la derivada de una función. Tomado de Malavé (2011)

La investigación arrojó conclusiones similares a las del caso anterior: interés de los alumnos por el tema estudiado, percepción de sus aplicaciones especialmente en situaciones vinculadas a las carreras de ingeniería, motivación a través de los aspectos históricos tratados y con el uso de las herramientas tecnológicas y captación de que los conceptos matemáticos no son entes aislados dentro de la disciplina sino que guardan mucha relación con otros ya estudiados o por estudiar.

En cada una de estos reportes se ha tratado de dar respuestas a las interrogantes sobre qué enseñar y cómo hacerlo en relación a un tópico matemático (la derivada de una función) a través de los mapas de enseñanza y aprendizaje como herramienta para la planificación de unidades didácticas. Una segunda opción que abordamos ante tales interrogantes es el análisis didáctico en los términos en que lo presenta Gómez (2002)

6 Análisis didáctico

El análisis didáctico, tal como lo plantea Gómez (2002), es un procedimiento para abordar la planificación local de un tema matemático específico; es decir, la planificación de una unidad didáctica o de una clase sobre una estructura matemática determinada o uno o más aspectos de ella (p. 252), concibiéndolo como una conceptualización del modo en que el profesor “debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares” (p. 251).

El análisis didáctico es un procedimiento cíclico que cubre cuatro tipos de análisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación; atiende a las condicionantes del contexto e identifica las actividades que el docente debería realizar para organizar la enseñanza de un tema específico (Gómez, Lupiañez, Rico y Marín, 2007).

El ciclo inicia con el análisis de contenido, siendo este un análisis de las matemáticas escolares, es decir, de un tópico matemático para su enseñanza y aprendizaje en el aula de clase. A través de él se determina el contenido que se va a desarrollar, los objetivos y competencias que se espera lograr, teniendo en cuenta tres tipos de significados matemáticos: "la estructura conceptual, los sistemas de representación y los modelos (análisis fenomenológico)" (Gómez, 2002, p. 263). En el análisis de contenido es fundamental considerar los organizadores curriculares para la comprensión de los diversos significados del concepto.

En el análisis cognitivo el profesor anticipa la actuación de sus estudiantes ante las tareas matemáticas que se les asignan, los errores más frecuentes y las dificultades en la comprensión del tema. El análisis de instrucción es el momento del diseño de la acción didáctica del profesor, se escogen las tareas y las correspondientes actividades y las estrategias y recursos para su ejecución en el ambiente escolar. Luego de la puesta en práctica de este diseño, el docente realiza el análisis de actuación con el fin de determinar sus alcances en términos de las capacidades desarrolladas, los objetivos logrados y las dificultades manifestadas por los estudiantes. Para continuar con el ciclo, los resultados del análisis de actuación serán el punto de partida para el análisis didáctico del tema o tópico subsiguiente, evidenciando este proceso similitudes con el de la investigación acción cuyo ciclo es: diagnóstico-planificación-ejecución-reflexión.

Bajo estos planteamientos, el análisis didáctico ha venido siendo utilizado por varios investigadores en el desarrollo de las capacidades que contribuyen a la competencia de planificación, sobre todo en el nivel local, en contextos de formación de profesores de Matemática. Entre ellos, los trabajos de Gómez (2002, 2007); Gómez, Lupiañez, Rico y Marín (2007); Lupiañez y Rico (2006) y en la planificación de unidades didácticas sobre temas específicos reportados en artículos en publicaciones especializadas como los de Rico, Marín, Lupiañez, Gómez (2008); Gallardo y González (2006), Lupiañez, (2010) y Ortiz, Iglesias y Paredes (2013), entre otros.

A continuación detallamos una experiencia de planificación que se aproxima a este modelo, centrado en un tema de estadística a nivel de tercer año de bachillerato, haciendo énfasis en el diseño de contenido.

El ensayo lo llevó a cabo la Prof. Karlecia Azocar como investigación de grado en la Maestría de Enseñanza de la Matemática en la UPEL-IPM, bajo nuestra tutoría.

Como ya se indicó con anterioridad, en Venezuela los contenidos de Matemática en educación secundaria están incluidos en el área "El ser humano y su interacción con otros componentes del ambiente" y dentro de esta, los tópicos de estadística aparecen en el componente denominado "Estudio de situaciones y tendencias". Para el tercer año de bachillerato los contenidos incluidos en este componente son: "Uso de la estadística descriptiva para el análisis de situaciones y problemas sociales locales, regionales y/o nacionales. Uso y definición de medidas de individualización (cuartiles, deciles y percentiles). Medidas de dispersión: desviación estándar, varianza" (MPPE, 2007, p. 57).

En años anteriores se estudian los conceptos de población muestra, variable, métodos estadísticos, agrupación de datos en intervalos de clase, distribución de frecuencia, diagramas de barra, de sectores, histogramas y ojivas; aplicación al análisis de procesos estadísticos y medidas de tendencia central (media, mediana y moda).

El estudio se realizó durante el 3° lapso del período escolar 2012–2013, iniciándose con un diagnóstico de los conocimientos de los estudiantes en cuanto a los prerrequisitos del tema y de los contenidos previos de estadística. este reveló dificultades en el manejo de porcentajes, sectores angulares de un círculo a partir de su amplitud en grados y en sumatorias, y un desconocimiento casi total de los temas estadísticos de años anteriores, lo cual no causó sorpresa pues es usual que los docentes no los incluyen en su programación (Azocar, 2013).

Tomando en cuenta este diagnóstico, los contenidos programáticos de 3° año de bachillerato, las competencias a desarrollar, los recursos y el tiempo disponible se decidió el contenido a desarrollar en el lapso académico. Esto se muestra en el figura 5.

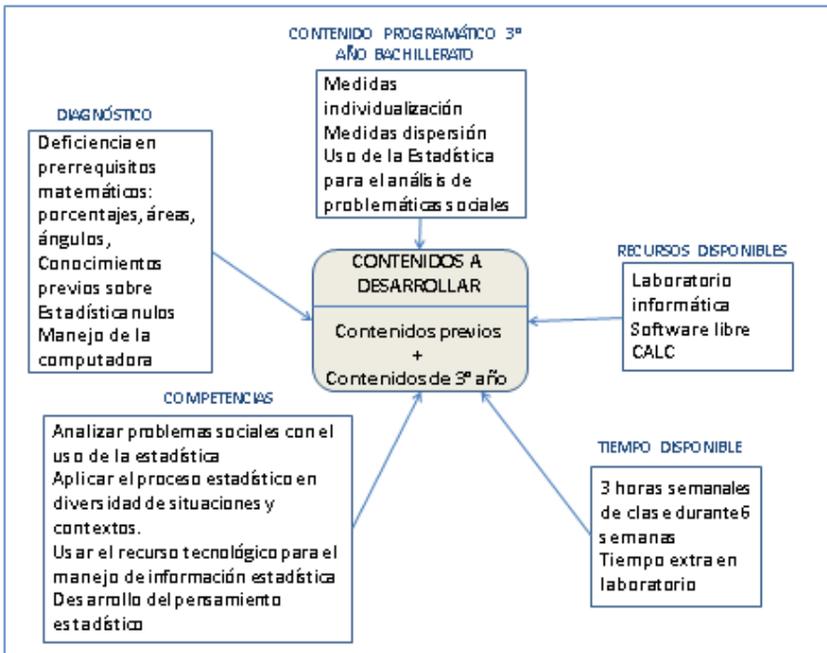


Figura 5: Elementos considerados en la selección del contenido a desarrollar.

Como objetivo se propuso incentivar el pensamiento y el razonamiento estadístico y como competencias que los estudiantes fueran capaces de utilizar el análisis estadístico en el estudio y comprensión de problemas sociales locales a través del ciclo completo del análisis estadístico, desde el diseño del estudio, la recolección de datos, su organización, presentación y análisis, hasta la comunicación en informe escrito de los resultados y conclusiones, con el uso de la tecnología.

Tomada la decisión de incluir tanto los contenidos previos de Estadística como los propios del año escolar, se elaboró un mapa conceptual del tópico de Estadística Descriptiva que muestra una secuenciación de los aspectos más relevantes a estudiar (Ver figura 6).

Este mapa delimita el contenido, incluyendo tanto lo conceptual como lo procedimental. Entre los conceptuales se deberán tomar en cuenta: términos, notaciones, convenciones, definiciones, propiedades, y dentro de los procedimentales: fórmulas de aplicación, modos de hacer y resolver, destrezas, estrategias, razonamientos.

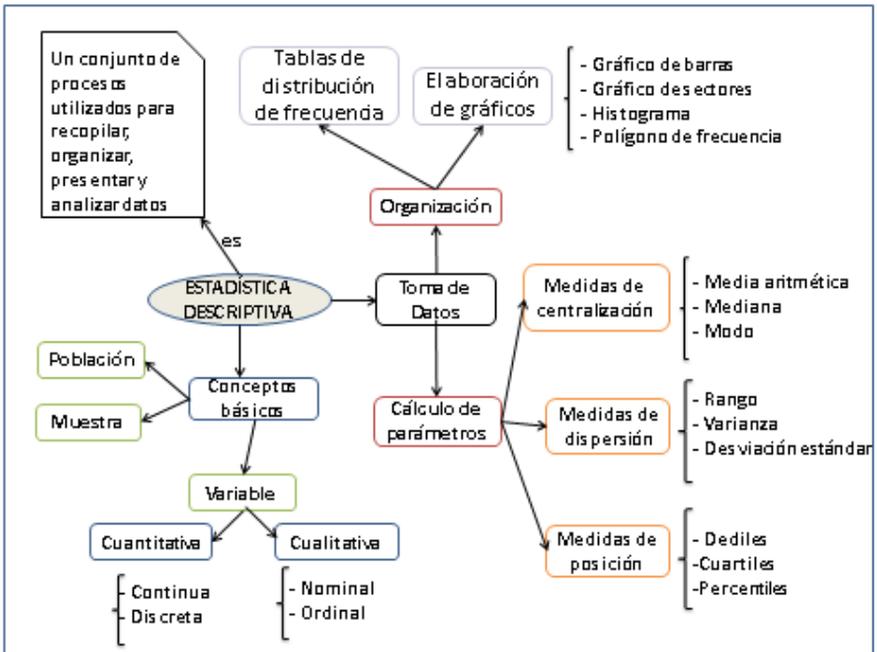


Figura 6: Mapa conceptual de Estadística Descriptiva. Tomado de Azocar (2013)

Luego se procedió a ubicar el tema en sus conexiones con otros tópicos matemáticos y otras temáticas del currículo. Con este fin se revisó el contenido programático de cada una de las áreas del currículo para ese año y los subsiguientes y se elaboró la tabla 2 que muestra esta relación resumiendo la fenomenología didáctica del tema.

Tabla 2
Fenomenología didáctica para el tema de Estadística Descriptiva

Área	Temas
Lengua, comunicación Y cultura	Redacción de encuestas y cuestionarios Redacción de informes Análisis de información Uso de Internet como medio de comunicación
Ciencias sociales y ciudadanía	Censos. Crecimiento poblacional. Densidad poblacional. Índices de inflación, desempleo. Interpretación crítica de estadísticas sociales. Estadísticas sobre violencia e inseguridad.
Desarrollo endógeno para El trabajo liberador	Diagnóstico participativo Elaboración y ejecución de proyectos productivos a través de la investigación. Redacción de informes de proyectos. Conocimiento y comprensión de la realidad Estadísticas sobre producción, importación, exportación, etc.
Educación física, depor- te y recreación	Estadísticas deportivas Valores promedios Records deportivos Tiempos máximos y mínimos El pulso como medio para establecer la frecuencia cardíaca.
El ser humano y su interacción con otros elementos del ambiente	
El ser humano consgo mismo	Desarrollo del pensamiento crítico. Alfabetización Estadística
El ser humano con sus semejantes y otros seres vivos	Índices de mortalidad y natalidad. Estadísticas de salud e higiene Alimentación, desnutrición Estudio de la genética. Clasificación de seres vivos
El ser humano en el ecosistema	Interpretación de figuras y cuadros para la comprensión de los fenómenos naturales Variabilidad genética y la preservación del ambiente. Consumo energético Lluvias, desbordamientos, deslaves. Calentamiento global
Procesos matemáticos y su importancia en la comprensión del en- torno	Geometría (Círculos, ángulos, área) Aritmética: Porcentajes, decimales, fracciones, razones, proporci- ones, sumatorias Probabilidad Estudio de variables Funciones y gráficas

El siguiente y último paso en el estudio de contenido fue el análisis y concreción de los organizadores curriculares. En la tabla 3 se muestran estos organizadores y se incluye un elemento extra que se refiere a la formación de valores que como eje transversal se debe contemplar como conocimiento actitudinal en toda unidad didáctica.

Tabla 3
Organizadores curriculares del tema Estadística Descriptiva

Organizador	Descriptores
Significado formal	Ver mapa conceptual (figura 6)
Fenomenología didáctica	Ver tabla 1
Sistemas de representación	Datos en bruto Representación tabular: Tablas simples, de doble entrada, de distribución de frecuencia. Representación gráfica: tanto manual como con el uso de software: figuras de barra, sectores, histogramas, ojivas
Historia de la Estadística	Video sobre el desarrollo de la Estadística donde se destacan tres etapas: Censos (aportes de los babilonios, egipcios, chinos, hindúes, romanos, griegos). La aritmética política (con aportes a la demografía, ciencias sociales, economía) Estadística y cálculo de probabilidades (Aportes de Euler, Lagrange, Gauss, Laplace, Fermat , Pascal), Fisher)
Resolución de problemas	Problemas abiertos y de construcción que impliquen identificación de variables, organización de datos, cálculo de medidas estadísticas, toma de decisiones.
Recursos didácticos y materiales	Guía didáctica: Investigación didáctica Materiales geométricos y colores Guía de problemas contextualizados en la cotidianidad del estudiante. Actividades de aprendizaje computarizado Recortes de prensa. Software libre CALC Centro Bolivariano de Información Y Comunicación (CEBIT)
Didáctica del tema	Análisis crítico de noticias Elaboración de proyectos grupales para el análisis de problemas sociales locales (*) Uso del programa CALC Asesorías grupales durante elaboración de proyectos Exposición de proyectos Cartelera alusiva
Valores	Participación Integración cooperativa Responsabilidad Sensibilidad ante problemas sociales

(*) Los proyectos ejecutados fueron:

- Educación sexual de los adolescentes
- Hábitos alimenticios de los adolescentes
- Los adolescentes y las redes sociales
- Tecnologías de la información y comunicación
- Violencia estudiantil.

Cada uno de los ellos vinculado con alguno de los elementos destacados en la fenomenología del tema.

El análisis cognitivo, centrado en el estudiante, se realizó en función de la prueba diagnóstica y el historial de los alumnos durante los lapsos precedentes. Conociendo las debilidades de los estudiantes en el manejo de porcentajes, raíces, razones y áreas, se decidió reforzar estos conocimientos cada vez que tuviesen que ser utilizados en los nuevos temas. Además, el hecho de no haber tenido la ocasión de estudiar conceptos estadísticos previamente hacía suponer un escaso desarrollo del razonamiento estadístico, por lo que este aspecto se tocó desde todas las actividades propuestas. Se previó que las tareas que implican largos cálculos serían tediosas para los estudiantes y pondrían más énfasis en lo algorítmico en detrimento de la comprensión de conceptos y el razonamiento estadístico. Se decidió trabajar con series cortas de datos contextualizados para los cálculos manuales y los dibujos a mano alzada que acompañan la introducción de los conceptos y el uso del software libre CALC para reforzar los conocimientos y realizar los cálculos y figuras a partir de series más numerosas.

Luego se procedió al diseño de la instrucción en un total de 9 sesiones de clase, algunas de 45 y otras de 90 minutos. Estas se organizaron en tres fases: inicio, desarrollo y cierre, especificando en cada una de ellas: contenidos, objetivos, estrategias, actividades, materiales didácticos, indicadores e instrumentos de evaluación. Las orientaciones didácticas seguidas y los materiales y recursos utilizados ya aparecen indicados junto con los organizadores curriculares.

El análisis de la actuación se llevó a cabo en primer lugar a través de los logros y dificultades de los estudiantes, contrastando los objetivos propuestos con las anotaciones sobre el desarrollo de las tareas llevadas en los registros diarios, la revisión de las actividades realizadas en la guía didáctica, los alcances de las actividades de aprendizaje computarizado, el chequeo de los avances de las investigaciones, revisión de las tareas realizadas con el programa CALC, la ejecución de los proyectos y la cartela alusiva a los mismos; y en segundo lugar mediante la percepción del propio docente en cuanto a su desempeño y a los alcances de la planificación una vez puesta en acción.

El análisis de actuación arrojó, entre otras, las siguientes conclusiones: a) el estado inicial de los estudiantes incide enormemente en su aprendizaje; b) el contenido de estadística sí se puede cubrir en el tiempo disponible y vincularse con otros tópicos matemáticos y temas de otras áreas para darle sentido a los procesos estadísticos; c) el número elevado de estudiantes (35) no es un obstáculo para la realización de las actividades planificadas, incluidas las asesorías grupales; d) el trabajo en equipo favorece el desarrollo de valores; e) a través de la investigación estadística se incrementa en los estudiantes la capacidad de reflexionar críticamente sobre problemáticas que ocurren a su alrededor y sustentar sus opiniones con base en un razonamiento estadístico; f) el uso de la computadora motivó a los estudiantes, facilitó el trabajo; permitió la exploración de datos y el manejo de términos y conceptos, h) el profesor debe dedicar mucho tiempo al diseño de materiales y a la atención individualizada y grupal de los estudiantes.

7 A manera de cierre

Hemos iniciado con dos interrogantes que están presentes en la mente de cualquier docente al momento de organizar los contenidos programáticos que exige el currículo oficial y hemos abordado dos alternativas que pueden ser utilizadas con éxito para la planificación de las correspondientes unidades didácticas o las clases de matemática: el análisis didáctico y el MEA. Aun cuando los hemos ejemplificado en situaciones diferenciadas, es de hacer notar que estos no son procedimientos mutuamente excluyentes, muy por el contrario pueden utilizarse conjuntamente, como lo hacen Ortiz, Iglesias y Paredes (2013) quienes emplean mapas de enseñanza-aprendizaje como herramienta para el análisis de contenido en un análisis didáctico para la planificación de unidades didácticas de geometría.

Existen otros procedimientos que guardan estrecha relación con los anteriores como es la Ingeniería Didáctica, que ya había sido citada a través de Llinares (2008 b) como una de las opciones para determinar planes de acción como sistemas de actividades y cuyas fases son bastantes coincidentes con las del análisis didáctico. Todas estas alternativas brindan al docente la opción de hacer de su tarea profesional una actividad investigativa (Flores, 1998), que en similitud con la investigación acción, conciba de manera cíclica momentos de diagnóstico, de planificación, de acción y de reflexión sobre la práctica y el logro de objetivos y metas de aprendizaje en los estudiantes. Por todo lo expuesto, concluimos diciendo que los dos procedimientos aquí reseñados contribuyen al desarrollo de las capacidades que configuran la competencia de planificación al poner en contacto a los estudiantes con este aspecto de la problemática profesional del docente de Matemática, propiciando de esta manera la formación de profesionales reflexivos.

Referencias y bibliografía

- Azocar, K. (2013). Análisis de problemáticas sociales locales con el uso del programa informático CALC en el estudio de la estadística descriptiva, Trabajo de Grado no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maturín, Venezuela.
- Ball, D. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject-matter knowledge part of the equation. In *J. Brophy (Ed.) Advances in research on teaching* (1-48). JAI Press: Greenwich
- Ball, D., Bass, H., Delaney, S., Hill, H., Lewis, J., Phelps, G., et al (2007). Knowing your subject well enough to teach it: what more does it take?. Presentation made at the Network Connections Conference, Pittsburgh.
- Bara, M. (2012). Mapa de Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática en el estudio de la derivada de funciones reales de una variable real. Trabajo de Grado no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maturín, Venezuela.
- Blanco Nieto, L. y Contreras, L. (2012). Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. 30, 101-123.
- Chevalard, Y. (1998). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Aique Grupo Editor: Buenos Aires.

- Flores, P. (1998). Formación inicial de profesores de Matemáticas como profesionales reflexivos. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 17, 37-48.
- Font, V. (s/f). Tendencias actuales en la enseñanza de la matemática. Disponible en <http://www.slide.net/cartoni21/tendencias-actuales-en-la-enseanza-de-la-matematica>
- Gallardo J. y González, L. (2006). El análisis didáctico como metodología de investigación en Educación Matemática. Ponencia en X Simposio de la SEIEM: Huesca.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en Matemáticas. *Revista EMA*. 7(3), 251-292.
- Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Gómez, P., Lupiañez, J.L., Rico, L. y Marín, A. (2007). Capacidades que contribuyen a la competencia de planificación del profesor de matemáticas de secundaria. Documento en línea. Disponible: cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/GomezP07-2908-PDF.
- González, F. (2000). Los nuevos roles del profesor de Matemática: retos de la formación del docente para el siglo XXI. *Paradigma*.XXX(1), 139-172.
- González, F. (2010). Un modelo didáctico para la formación inicial de profesores de Matemática. *Sapiens*.11(1), 17-32.
- González J.L. y Gallardo, J. (2006). Análisis didáctico curricular. Un procedimiento para fundamentar y completar el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de Matemáticas. Documento en línea. Disponible: http://www.gonzalezmar.es/AD_CURRICULAR.pdf.
- Guacaneme, E., Obando, G., Garzón, D. y Villa-Ochoa, J. 2012. Informe sobre la formación inicial y continua del profesor de Matemáticas: Colombia. Disponible em <http://www.cimm.ucr.ac.cr/redregional/>
- León, N., Beyer, W., Serres, Y. e Iglesias, M. (2012). Informe sobre la formación inicial y continua del profesor de Matemática: Venezuela. Disponible em <http://www.cimm.ucr.ac.cr/redregional/>
- Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En J.P. de Ponte & L. Serrasina (Org.) *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália*. Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Lisboa.
- Llinares, S. (2008a). Construir el conocimiento necesario para enseñar. *Evaluación e Investigación*. 1(3), 7-30.
- Llinares, S. (2008b). Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación. Conferencia invitada en III Encuentro de Programas de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional Santa Fe de Bogotá.
- Lupiañez, J.L. (2010). Competencias del profesor de Educación Primaria. Documento en línea. Disponible: funes.uniandes.edu.co/800/
- Lupiañez, J.L. y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de las matemáticas escolares. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.) *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* 454). Huesca: Instituto de Estudios Aragoneses.
- Malavé, A.(201). Las actitudes hacia las matemáticas, su aprendizaje y la incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes del Instituto Universitario Politécnico Santiago Mariño.

Trabajo de Grado no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maturín, Venezuela.

Moreno, M.F. (2007). De la Matemática formal a la Matemática escolar. *PNA*. 1(3), 99-111.

MPPE (2007). Subsistema de Educación Secundaria Bolivariana. Liceos Bolivarianos: Currículo. Caracas: Autor.

Orellana, M. (2002). Qué enseñar de un tópico o de un tema. *Enseñanza de la Matemática*. 11, 21-42.

Ortiz, J. Iglesias, M. y Paredes, P. (2013). El análisis didáctico y el diseño de actividades didácticas en Matemáticas. En J. L. Lupiañez (Ed.). *Análisis didáctico en Educación Matemática* (pp293-308). Granada:Comares.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de Matemáticas. En Rico L. (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*.(39-59). Horsari: Barcelona.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesorado. *Revista de currículum y formación del profesorado*. 8(1),1-15.

Rico, L., Marín,A., Lupiañez, J.L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *SUMA*. 58, 7-23.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knoeñedge growth in teaching. *Educational Research*. 15(2), 4-14.

UPEL – Comisión de Currículo de Pregrado (s/f). Competencias específicas del profesor de Matemática. Caracas: Autor.