

EXPERIENCIA DE LA INCORPORACIÓN DEL APRENDIZAJE COLABORATIVO, DOBLADO DE PAPEL Y TICS EN LA ENSEÑANZA DE LAS SECCIONES CÓNICAS

Alejandra Alvarado Alvarado¹ y José Arturo Molina Mora^{1}.*

¹ Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica.

Recibido: 22/Jun/2017; Aceptado: 17/Oct/2018

Abstract

One of the main challenges of education is to ensure that students construct knowledge in a significative way and that their training does not consist of an application of formulas for the resolution of exercises. We propose a strategy based on collaborative learning for the teaching of the Conic Sections at the initial university level. The application carried out in an Intermediate Calculus course includes the manipulation of mathematical objects through paper and the use of Information and Communication Technologies (ICTs) to generate conjectures, verify properties, deduce equations, solve problems and study Applications. The implemented strategy showed positive results and high satisfaction of the students, who worked in groups and plays a protagonic role during the various activities and that allowed to construct concepts from the simple to the complex.

Resumen

Uno de los principales retos de la educación es lograr que los estudiantes construyan el conocimiento de un modo significativo, y que su formación no consista en una mera aplicación de fórmulas para la resolución de ejercicios. Se propone una estrategia basada en aprendizaje colaborativo para la enseñanza de las Secciones Cónicas a nivel universitario inicial. La implementación realizada en un curso de Cálculo intermedio incluye manipulación de objetos matemáticos por medio del doblado de papel y el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs) para generar conjeturas, verificar propiedades, deducir ecuaciones, resolver problemas y estudiar aplicaciones. La estrategia implementada mostró resultados positivos y de alta satisfacción por parte de los estudiantes, quienes asumieron en grupos un papel protagónico durante las diferentes actividades y construyeron conceptos desde lo sencillo hasta lo complejo.

Key words: conic sections; collaborative learning; paper folding; ICTs.

Palabras clave: secciones cónicas; aprendizaje colaborativo; doblado de papel; TICs.

I. INTRODUCCIÓN

En la reflexión en la que se enmarca el proceso de enseñanza y aprendizaje, la creación de conexiones y experiencias son fundamentales para cumplir con los objetivos educativos, en particular en la clase de matemáticas. Así, los diversos factores que influyen directamente en este proceso, como lo son el contexto, la naturaleza de los contenidos y los conocimientos previos de los estudiantes, deben ponerse a disposición de las estrategias didácticas para permitir a los educandos tener un papel más significativo. Es necesario comprender la formación como un proceso que va más allá de una cultura transmisora o reproductiva, sino que se refiere a evolucionar del paradigma de la enseñanza hacia el paradigma de aprendizaje, con el fin de promover un papel más protagónico de los estudiantes en la construcción de su proceso de formación (Cascante y Marín, 2012).

Sin embargo, la enseñanza de la matemática en el nivel universitario inicial, como lo son los cursos de Cálculo para carreras aplicadas como ingenierías, tradicionalmente se ha realizado mediante

*Autor para correspondencia: JOSE.MOLINAMORA@ucr.ac.cr

un modelo magistral, en el que los estudiantes adquieren la información desde el docente y luego la aplican en la resolución de ejercicios y problemas, de forma pasiva y sin darse una reflexión verdadera del fundamento de conceptos y origen de fórmulas. Además, la comunicación entre pares no siempre es estimulada, de manera que valiosos aportes en el lenguaje entre estudiantes no son explotados para el aprendizaje.

De forma particular en el tema de Secciones Cónicas, la realidad del proceso enseñanza y aprendizaje no es muy diferente a lo mencionado antes, por lo que se han propuesto una serie de experiencias didácticas en las que se exploran los conceptos del contenido relacionados a la definición, origen, construcción, características geométricas y algebraicas, gráficas y aplicaciones. Para ello, se propone una estrategia del estudio de las Secciones Cónicas con múltiples actividades fundamentadas en el aprendizaje colaborativo, doblado de papel y Tecnologías de la Información y Comunicación (TICs), de manera que contribuya a un aprendizaje menos memorístico por parte de los estudiantes y que a su vez, favorezcan la reflexión y la construcción del conocimiento mediante el intercambio de razonamientos.

Fundamentación teórica

El trabajo colaborativo se refiere a la actividad que efectúan pequeños grupos de estudiantes dentro de las aulas de clase; éstos se forman después de las indicaciones explicadas por el docente y durante el inicio de la actividad y al interior del grupo, los integrantes intercambian información, tanto la que activan (conocimientos previos), como la que investigan. Posteriormente trabajan en la tarea propuesta hasta que han concluido y comprendido a fondo todos los conceptos de la temática abordada, aprendiendo así a través de la cooperación (Glinz, 2005). El trabajo colaborativo como estrategia de aprendizaje se basa en el trabajo en grupos de personas heterogéneas pero con niveles de conocimiento similares para el logro de metas comunes y la realización de actividades de forma conjunta, existiendo una interdependencia positiva entre ellas (Marin-Juarros, Negre-Bennasar y Pérez-Garcias, 2014).

Además, como aporta Calzadilla (2002), con el trabajo colaborativo se estimula la desaparición de observadores pasivos y receptores repetitivos, superando los tradicionales hábitos de memorización utilitaria, para promover procesos dialógicos que conduzcan a la confrontación de múltiples perspectivas. Así, a la acción de aprender se le reconoce su carácter social, donde el esquema que establecía al profesor como el que enseña y al estudiante como el que aprende de forma exclusiva, no tiene cabida y en su lugar se presenta el aprendizaje como un proceso social que se construye en la interacción no sólo con el profesor, sino también con los compañeros, con el contexto y con el significado que se le asigna a lo que se aprende (Maldonado, 2007).

Los cinco componentes del aprendizaje colaborativo son la interdependencia positiva, la responsabilidad individual, la interacción fomentadora cara a cara, las habilidades interpersonales, y el procesamiento por el grupo (Glinz, 2005), los cuales complementan el paradigma de aprendizaje como una actividad de asimilación o incorporación de la información, no por memoria, sino en esquemas que poseen una información previamente organizada en patrones, así como funciones cognoscitivas que ajustan o acomodan la información nueva y la previamente adquirida (Maldonado, 2007).

En este sentido, existe un reto de incorporar alternativas no basadas en la memoria para el estudio de las matemáticas en el que se logren generar ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas, comprensivas y que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos (Pérez, 2012). Para ello, es importante la implementación de estrategias didácticas que impulsen el desarrollo de competencias por parte de los estudiantes, como lo menciona Tobón (2007), quien se refiere al aprendizaje en equipo como una estrategia que favorece la cooperación, y que se lleva a cabo en diferentes etapas: (i) selección de una actividad o problema, (ii) organización de estudiantes en pequeños grupos de acuerdo con la tarea y planeación del trabajo por realizar, (iii) ejecución de las acciones y (iv) supervisión del trabajo de cada uno de los grupos y ofrecimiento de asesoría puntual.

En la búsqueda de alternativas para el estudio de contenidos matemáticos de una forma más activa por los estudiantes y en un contexto de trabajo colaborativo, tanto el doblado de papel como la introducción de las TICs ofrecen una oportunidad a implementar en el aula. Respecto al doblado de papel, se puede afirmar que se consolida como una propuesta didáctica alternativa para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, en particular mediante la axiomática del doblado (Santa y Jaramillo, 2010). Así, se logra la enseñanza intuitiva de la geometría y un acercamiento al

conocimiento del mundo exterior en las denominadas “lecciones de cosas”, donde se aprovecha la figura resultante del plegado en papel para generar una dinámica de preguntas y respuestas, por parte del profesor y los estudiantes entre sí, sirviendo todo ello para desarrollar el sentido de observación y el sentido crítico (Aznar, 2011).

En conjunción del aprendizaje colaborativo, el doblado de papel logra que el nivel de conocimiento migre de lo concreto a lo abstracto, y que en todo el proceso se vaya desarrollando una vida de relación, de afectos, de emociones, y de comunicación social, donde la psicomotricidad es quien subraya la importancia de este proceso y ofrece las claves para entenderlo mediante coordinación, control de la motricidad voluntaria, organización espacio-temporal, la representación mental en el espacio, grafomotricidad y la relación con los objetos y la comunicación (Aznar, 2011), (Rius, 1989).

Por otra parte, de forma complementaria al doblado de papel, las actividades fundamentadas en el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs) ofrecen alternativas a explorar para el desarrollo de contenidos matemáticos. En general, la introducción de las TICs en educación matemática ha sido cada vez más frecuente, en parte, como respuesta de los grandes avances del software matemático en la últimas dos décadas, así como la diversidad de estudios en los que se demuestra el papel del uso de paquetes computacionales para obtener cambios significativos en la forma de enseñar y aprender, incluyendo la matemática universitaria, con el desarrollo de competencias, conocimientos y valores fundamentales (Gatica y Ares, 2012), (Molina, 2015).

Además, el desarrollo de las nuevas tecnologías y su utilización en el proceso educativo, requiere del soporte que proporciona el aprendizaje colaborativo, para optimizar su intervención y generar verdaderos ambientes de aprendizaje que promuevan el desarrollo integral de los aprendices y sus múltiples capacidades (Calzadilla, 2002). Debido al acceso a la tecnología que posee la sociedad actual en diferentes ámbitos de la vida cotidiana, el uso de las TICs en el aula podría funcionar como impulsor de rasgos motivacionales (Alfaro, Alpizar y Chaves, 2012), donde los estudiantes acceden a un ambiente de aula con cierto sentido de pertenencia o incluso familiaridad, así como generar una actitud afectiva y positiva hacia la matemática (Chavarría-Arroyo, 2014).

Un proceso de aprendizaje colaborativo basado en TICs brinda oportunidad de (i) estimular la comunicación interpersonal, que es uno de los pilares fundamentales dentro de los entornos de aprendizaje virtual, sincrónica o asincrónica, (ii) facilitar el trabajo colaborativo, al permitir que los estudiantes compartan información, trabajen con documentos conjuntos y faciliten la solución de problemas y toma de decisiones, (iii) brindar seguimiento del progreso del grupo, a nivel individual y colectivo, (iv) acceder a información y contenidos de aprendizaje, (v) gestionar y acceso a toda aquella información vinculada con el expediente del estudiante, (vi) crear de ejercicios de evaluación y autoevaluación para evaluar el desempeño grupal e individual (Calzadilla, 2002).

Por otra parte, el contenido de Secciones Cónicas, en particular, se caracteriza por la aplicación de muchas fórmulas para la realización de los ejercicios y su fundamentación normalmente es muy limitada (Ramírez, 2013). Algunos autores se han referido a estrategias aplicadas para el estudio de este tema; tal es el caso de un estudio del año 2013, en el que un grupo de estudiantes de secundaria participaron de una experiencia didáctica dividida en varias etapas. Primero, se les brindó información general sobre la historia y aplicaciones de la Secciones Cónicas, y luego se les solicitó construir conos en plastilina y realizarles cortes con un bisturí, para identificar la elipse, la parábola y la hipérbola. Posteriormente, se les pidió identificar las figuras estudiadas en revistas y periódicos. Una vez finalizada esta etapa, se les orientó para que trazaran cónicas por medio de doblado de papel. Después, los estudiantes fueron guiados por el docente para tomar mediciones que les permitieron deducir propiedades de las diferentes figuras. El autor concluye que la técnica realizada facilita la comprensión de los elementos geométricos, permite que el estudiante aprenda a su ritmo y fomenta la motivación, además de que ésta es una propuesta metodológica sencilla con la que se puede apreciar tanto interactividad con conceptos geométricos como su visualización, de una manera natural que facilita el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la geometría (Calderón, 2013).

El trabajo realizado por Pérez (2012) muestra el diseño y aplicación de una Unidad Didáctica para conceptualizar las Secciones Cónicas desde una versión geométrica hacia una analítica, en la cual estudiantes entre los catorce y dieciséis años de edad trabajaron en grupos resolviendo diferentes actividades que la autora denomina “situaciones problema”. En la primera actividad los estudiantes trabajaron con plastilina, como también lo hizo Calderón, para conocer las diferentes Secciones Cónicas. En la siguiente actividad, se le facilita a los estudiantes fotocopias con las figuras para que realicen

mediciones y deduzcan propiedades. En la tercera se estudia la parábola por medio de chorros de agua que se generan con ayuda de una manguera, en diferentes ángulos, toman fotografías y analizan simetrías; también identifican las Secciones Cónicas sosteniendo una linterna para formar un área iluminada en el suelo. Finalmente, los grupos utilizaron el programa *Graph* para representar Secciones Cónicas centradas en el origen, y luego hicieron cambios en las ecuaciones para generar desplazamientos de las figuras. La autora señala que dicho software permite integrar la tecnología con el proceso de modelación al realizar procedimientos de visualización acompañados de medición, verificación de propiedades y traducción del lenguaje gráfico al algebraico y viceversa (Pérez, 2012).

Ramírez (2013) realizó una propuesta en la que hace un recorrido histórico por las Secciones Cónicas desde sus orígenes, incluyendo distintos enfoques teóricos y prácticos que fueron utilizados en su tratamiento, para luego presentar un análisis didáctico de un texto escolar aportando nuevas ideas para el abordaje del tema, con ayuda de los programas *Winplot* y *Geogebra*. En *Winplot* se construyeron conos y planos para visualizar, mediante intersecciones, las diferentes Secciones Cónicas. Del libro de texto se extraen algunos ejercicios que se resuelven mediante análisis, pero que se visualizan gráficamente con ayuda de *Geogebra*. El autor señala que un tratamiento más tradicional o clásico que innovador, pero con la inserción de nuevas herramientas como el software de geometría dinámica, promueven un mejor entendimiento y construcción de conceptos, a la vez que invitan a la exploración, en búsqueda de propiedades y características singulares de cada cónica o de sus elementos, también destaca que la utilización de las TICs en la resolución de problemas geométricos (y analíticos) facilita la interpretación y afianza la relación del estudiante con el conocimiento (Ramírez, 2013).

De esta manera, entre diversidad de opciones y con las potencialidades de cada una, se seleccionaron el doblado de papel y las TICs como elementos básicos para una estrategia de trabajo colaborativo en matemáticas, específicamente para el contenido de Secciones Cónicas. Con esto, se esperaba estimular el razonamiento y explotar las propiedades visuales y experimentales durante el estudio del tema, así como crear una clase que permita intercambiar ideas en un ambiente libre de competencia, seguro, estimulante y, con una coordinación adecuada, se logre crear un espacio abierto y de confianza en los que los estudiantes se vean motivados a especular, innovar, preguntar y comparar ideas conforme resuelven problemas, según a como ha sido reportado (Vicerrectoría Académica Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey [ITESM], 2000).

II. ESTRATEGIA DIDÁCTICA

Contexto

La experiencia de la incorporación del aprendizaje colaborativo, doblado de papel y TICs en la enseñanza de las Secciones Cónicas se realizó con un grupo de treinta estudiantes del curso Cálculo II (MA1002), que corresponde a una materia de servicio de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica. Este curso forma parte del currículo de estudiantes de las carreras de Ingeniería, Enseñanza de las Ciencias, Química, Física y Geología. En los planes de estudio, el curso se encuentra en el segundo ciclo del primer año o el primer ciclo del segundo año. Los conocimientos previos con los que cuentan los estudiantes son los adquiridos en el curso Precálculo y Cálculo I. Los conceptos que los estudiantes deben utilizar para el abordaje del tema de Secciones Cónicas son de álgebra y geometría básica. Para el desarrollo de las diferentes actividades, los estudiantes se organizaron en grupos de tres personas, debido a la disposición de los computadores en el laboratorio. Además, se contó con una guía de trabajo general para cada una de las actividades realizadas.

Actividades de introducción

A modo de introducción al tema de Secciones Cónicas, se presentaron aplicaciones concretas de las mismas mediante las Leyes de Kepler, que describen el movimiento de los planetas en sus órbitas elípticas, y la trayectoria de cometas en torno al sol, las cuales se modelan mediante elipses, parábolas o hipérbolas. Al mismo tiempo, se presentaron las Secciones Cónicas como la intersección de un cono de dos mantos y un plano. Para ello, la guía de trabajo contaba con instrucciones para que, en el programa *Geogebra*, los estudiantes pudieran realizar una representación tridimensional y manipular la posición del plano por medio de deslizadores, con lo cual visualizaron los diferentes cortes. La construcción se realizó con los módulos automáticos

disponibles en el programa, iniciando por el cono, luego un plano (con un punto dependiente de un deslizador) y finalmente la intersección de superficies.

Deducción de las Secciones Cónicas en el plano

Una estrategia basada en el doblado de papel fue usada para la generación de las Secciones Cónicas en el plano. Para ello, se les explicó rápidamente los diferentes axiomas de esta geometría (Cuadro 1). Se entregaron hojas delgadas, regla, escuadra y la guía de trabajo con las instrucciones de cómo realizar los dobleces para obtener cada curva. Dichas instrucciones fueron las presentadas por Santa y Jaramillo (2010).

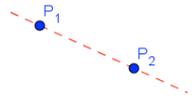
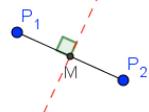
Deducción de propiedades geométricas y ecuación canónica

Con el fin de determinar las características geométricas en las Secciones Cónicas, la guía de trabajo incluyó instrucciones para que los estudiantes tomaran medidas con regla en las figuras construidas, y pudieran deducir la definición de las Secciones Cónicas como lugar geométrico. Por ejemplo, en el caso de la elipse, se solicitó a los estudiantes seleccionar un punto de la misma, medir su distancia a cada uno de los focos y sumarlas, lo mismo para cualquier otro punto de la elipse, con el fin de que conjeturaran que dicha cantidad es constante (tomando en consideración un cierto margen de error). Posteriormente se visualizó esa misma propiedad haciendo uso del programa *Geogebra*: Con la guía del docente, los estudiantes utilizaron los módulos de creación automática de Secciones Cónicas para crear la elipse, agregaron un punto cualquiera sobre ella y el programa calculó la distancia a los focos. Manualmente se incluyó un parámetro obtenido como la suma de las distancias de dicho punto a los focos. Moviendo el punto sobre la elipse, verificaron con detalle las conjeturas realizadas en papel. De manera análoga se dedujeron las definiciones geométricas para las Secciones Cónicas restantes. A continuación, usando la definición de distancia y las observaciones realizadas en papel y en el software, el docente explicó la deducción de la ecuación de la elipse y posteriormente se solicitó a los estudiantes realizar el proceso para la parábola y la hipérbola de forma análoga.

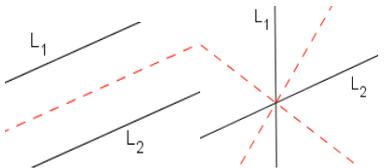
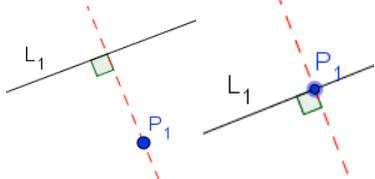
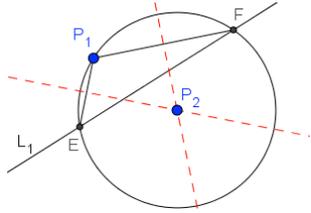
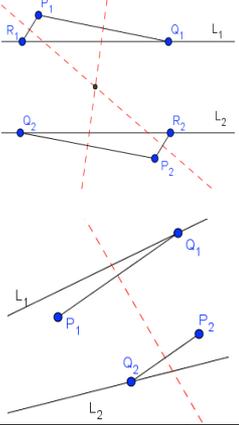
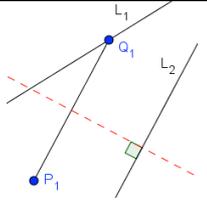
Construcción de Secciones Cónicas a partir de elementos dados

Se utilizó el programa *Winlab* y la guía de trabajo para obtener la ecuación canónica de las Secciones Cónicas a partir de elementos geométricos dados (focos, vértices, centro o directriz, según corresponda). Para ello, en la plataforma bidimensional del programa se asignaron los elementos geométricos con los módulos de “Cónicas” y luego, sin graficar, se realizaron los análisis visuales para determinar el tipo de cónica, determinar parámetros (coordenadas, semiejes, distancias) y finalmente establecer manualmente la ecuación. La construcción de la gráfica con dichos elementos y la obtención automática de la ecuación se realizó posterior a la obtención manual, de manera que sirvió para validar la solución obtenida.

Cuadro 1. Axiomas de la geometría del doblado de papel

Axiomas de la geometría del doblado de papel	Explicación	Dibujo (Líneas punteadas representan dobleces)
AXIOMA #1: Dados dos puntos distintos P_1 y P_2 , existe un único doblez que pasa a través de ellos.	El doblez representa a la única recta que contiene a dos puntos distintos P_1 y P_2 dados.	
AXIOMA #2: Dados dos puntos distintos P_1 y P_2 , existe un único doblez que lleva a P_1 sobre P_2 .	El doblez representa a la mediatriz de $\overline{P_1P_2}$, es decir, la única recta perpendicular a $\overline{P_1P_2}$ que contiene a su punto medio.	

Cuadro 1. Axiomas de la geometría del doblado de papel. *Continuación.*

Axiomas de la geometría del doblado de papel	Explicación	Dibujo (Líneas punteadas representan dobleces)
<p>AXIOMA #3: Dados dos dobleces distintos L_1 y L_2, existen dos dobleces o un dobléz que pone a L_1 exactamente sobre L_2.</p>	<p>Si L_1 es paralela a L_2, entonces se hace referencia a una paralela que equidista de los dos dobleces. El dobléz en este caso sería único. Si L_1 no es paralela a L_2, entonces se hace referencia a la bisectriz del ángulo que forman los respectivos dobleces al intersectarse. Si estos se intersectan en la hoja de papel, se pueden encontrar dos dobleces. Si estos no se intersectan en la hoja de papel, existen los dos dobleces, pero uno de ellos está por fuera de la hoja.</p>	
<p>AXIOMA #4: Dado un dobléz L_1 y un punto P_1, existe un único dobléz que pone L_1 sobre sí misma y pasa por P_1”</p>	<p>El dobléz representa a la única perpendicular a una recta dada, que contiene a un punto dado, el cual puede ser exterior o pertenecer a la recta.</p>	
<p>AXIOMA #5: Dados un dobléz L_1 y dos puntos distintos P_1 y P_2, se puede encontrar un dobléz, dos dobleces o ningún dobléz, si se lleva el punto P_1 sobre L_1 y se garantiza que el dobléz pase por P_2”</p>	<p>El punto P_2 se mantiene fijo, mientras que P_1 debe recorrer una trayectoria circular hasta coincidir con un punto que pertenezca a L_1; luego, P_2 es el centro de una circunferencia hipotética de radio $\overline{P_1P_2}$.</p> <p>En la búsqueda del dobléz, se presentan entonces tres posibilidades de acuerdo con las posiciones relativas de la circunferencia y el dobléz L_1: que el dobléz sea secante, sea tangente o que simplemente no interseque a la circunferencia.</p>	
<p>AXIOMA #6: Dados dos dobleces L_1 y L_2 y dos puntos P_1 y P_2 exteriores a L_1 y L_2 respectivamente, se puede encontrar un dobléz, dos dobleces, tres dobleces o ningún dobléz, si se pone el punto P_1 sobre el dobléz L_1 y a su vez, el punto P_2 sobre el dobléz L_2.</p>	<p>La cantidad de dobleces depende de las posiciones relativas de los dobleces y de los puntos.</p>	
<p>AXIOMA #7: Dados dos dobleces L_1 y L_2 y un punto P_1 exterior a L_1, se puede encontrar un dobléz o ningún dobléz, que sea perpendicular a L_2 y que ponga el punto P_1 sobre el dobléz L_1.</p>	<p>Si los dobleces L_1 y L_2 son paralelos, no es posible encontrar el dobléz. Si los dobleces L_1 y L_2 no son paralelos, existe un único dobléz.</p>	

Generación de sólidos de revolución a partir de Secciones Cónicas

Con el objetivo de visualizar más aplicaciones de las Secciones Cónicas, se hizo una introducción al concepto de sólidos de revolución. Posteriormente, cada uno de los grupos generó este tipo de superficies a partir de las Secciones Cónicas con ayuda del programa *Mathematica* y un código de programación preestablecido. A partir de esto, se usaron las superficies obtenidas para referirse a aplicaciones concretas, como lo es el elipsoide WGS84 que representa el planeta tierra, usado por topógrafos y geólogos, y su aplicación para la descripción de trayectorias alrededor del planeta. Además se presentó el ejemplo de la construcción del puente hiperbólico en calle Corporation en Manchester (Inglaterra) y el uso de las propiedades del paraboloides en el caso de una cocina solar parabólica, misma que es usada en la población de Isla Venado, Costa Rica.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La propuesta didáctica presentada para el estudio de las Secciones Cónicas se fundamenta en el aprendizaje colaborativo, mediado con actividades de doblado de papel y TICs. El aprendizaje colaborativo busca generar el aprendizaje mediante la interacción grupal con base en la selección de una actividad o problema, la organización de los estudiantes en pequeños grupos de acuerdo con la tarea y planeación del trabajo por realizar, la ejecución de las acciones, la supervisión del trabajo y el ofrecimiento de asesoría puntual (Tobon, 2007).

La implementación se ha realizado en Cálculo II, un curso de matemática universitaria inicial, y de forma gradual a lo largo de 4 años. Dado que el aprendizaje colaborativo es el hilo conductor de la propuesta, los estudiantes logran explorar, discutir y deducir propiedades y ecuaciones de las figuras, tomando un papel protagónico en su proceso de aprendizaje, y dejando al docente la labor de guía durante todo el proceso.

Entre las actividades que se deben realizar en cada uno de los grupos, el doblado de papel se usa para visualizar y conjeturar algunos conceptos geométricos mediante la manipulación de materiales concretos y, con la utilización de las TICs, se permite la comprobación o extensión de conjeturas, resolución de ejercicios complejos y una manipulación detallada, entre otros.

La estrategia comienza con el reconocimiento de algunas aplicaciones de las Secciones Cónicas, las cuales se refieren al uso de las leyes de Kepler (Figura 1-A) y la trayectoria de cometas alrededor del sol (Figura 1-B). Además, con ayuda del programa *Geogebra* se generan la circunferencia, elipse, parábola e hipérbola a partir de la intersección de un cono de dos mantos y un plano (Figura 1-C). En este caso, la manipulación lograda con el programa permite apreciar desde todos los ángulos las diferentes curvas obtenidas por la intersección del cono y el plano, lo cual da el valor de la visualización como elemento clave para la interiorización de conceptos básicos, la generación de conjeturas y estudios de casos (Gatica y Ares, 2012).

Posteriormente, se utilizó la técnica de doblado de papel, basada en axiomas de esta geometría, para que los estudiantes puedan construir las Secciones Cónicas, tomar mediciones y deducir su definición como lugar geométrico. En la Figura 2 se aprecia cómo surgen la elipse, la hipérbola y la parábola con el doblado de papel. Esta propuesta ya ha sido explorada anteriormente y se le ha brindado valor como elemento de empoderamiento por parte del estudiante en la construcción del concepto, además de permitir el establecimiento de conexiones complejas, pues la obtención en el plano o de forma bidimensional es contrastada con la obtención tridimensional por el cono y el plano (Santa y Jaramillo, 2010) (Calderón, 2013). Adicionalmente, las curvas en papel y el estudio de propiedades geométricas es contrastada con la geometría dinámica, al hacer uso del programa *Geogebra*, que permite el reconocimiento de las características de cada una de las Secciones Cónicas, de forma más general, para diversidad de puntos y sin márgenes de error en las mediciones (Figura 3-A). Además, esa información fue usada de forma directa para la deducción de las ecuaciones cartesianas, en el que se da la interconexión de la geometría y el álgebra para el estudio del mismo objeto. Por facilidad y sin pérdida de generalidad, se consideraron Secciones Cónicas con centro en el origen para los análisis algebraicos (Figura 3-B).

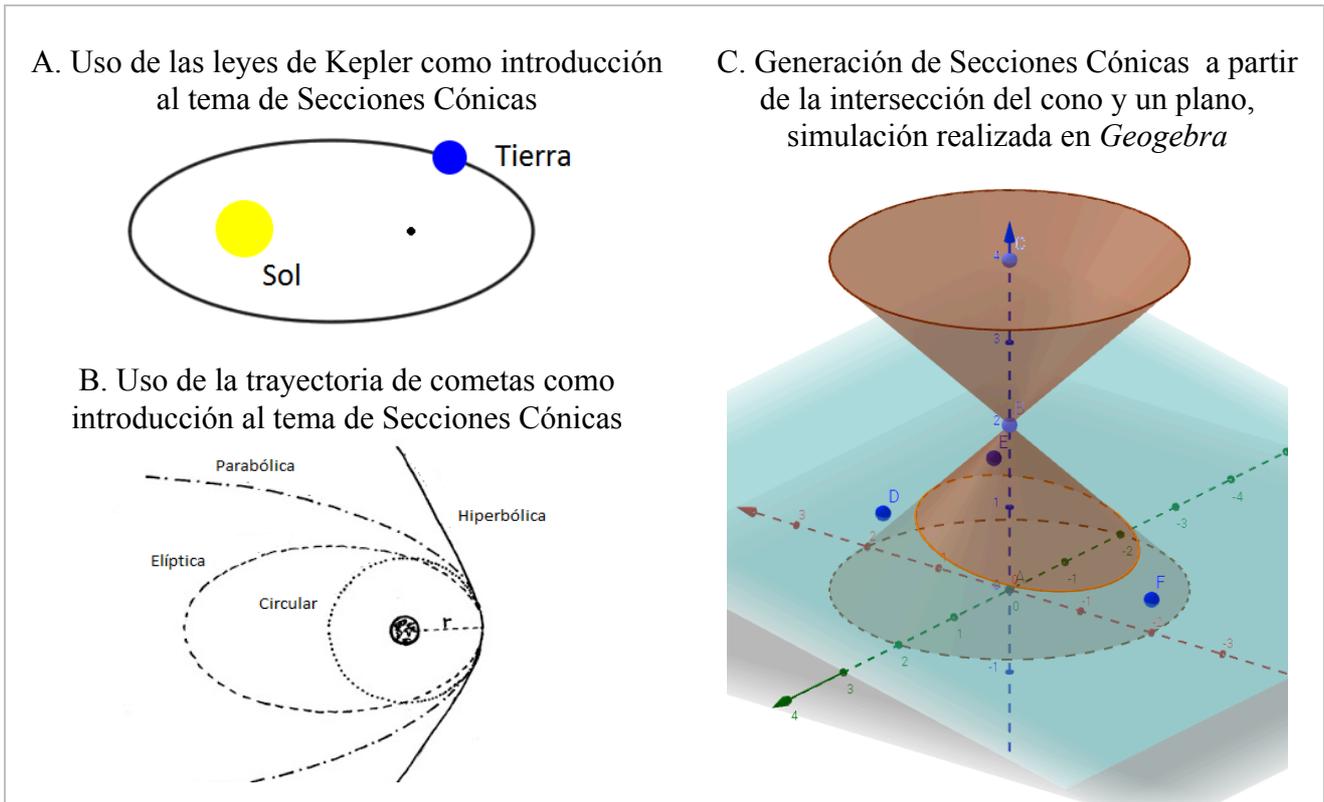


Figura 1. Actividades de estudio general de la elipse como introducción al estudio de las Secciones Cónicas.

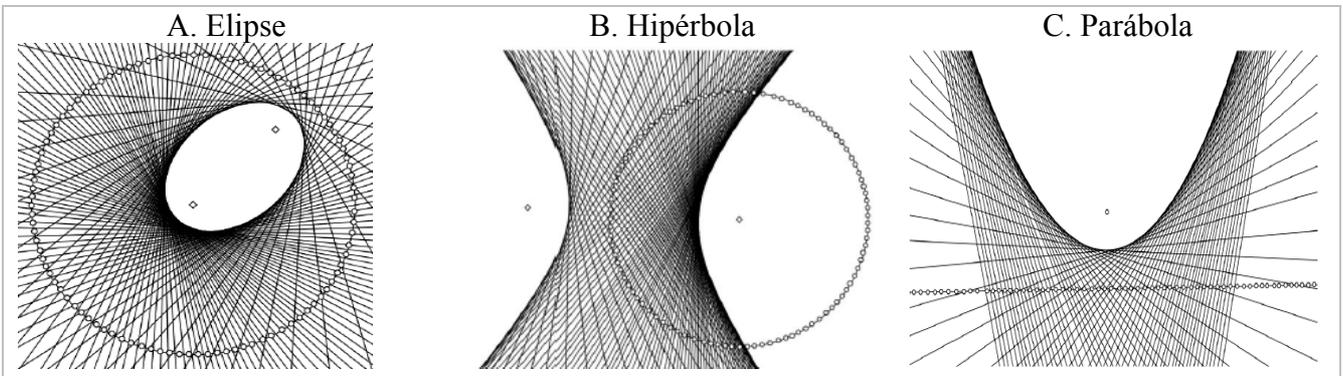


Figura 2. Construcción de Secciones Cónicas por doblado de papel (Santa y Jaramillo, 2010).

Para la obtención de las ecuaciones canónicas de las Secciones Cónicas a partir de puntos de la curva, focos y directriz, se usó el programa *Winlab*. Inicialmente, con una integración de la visualización, el conocimiento de las propiedades geométricas y la ecuación canónica general, se obtuvieron manualmente los parámetros específicos del ejemplo y luego se estableció la gráfica como comprobación, así como la obtención de la ecuación con el software (Figura 4-A). Esta integración fue de gran valor para retomar los múltiples conceptos y establecer elementos esenciales que permiten diferenciar geométrica (disposición de puntos, focos o vértices) o algebraicamente (presencia de elementos cuadráticos o signos) las diferentes Secciones Cónicas.

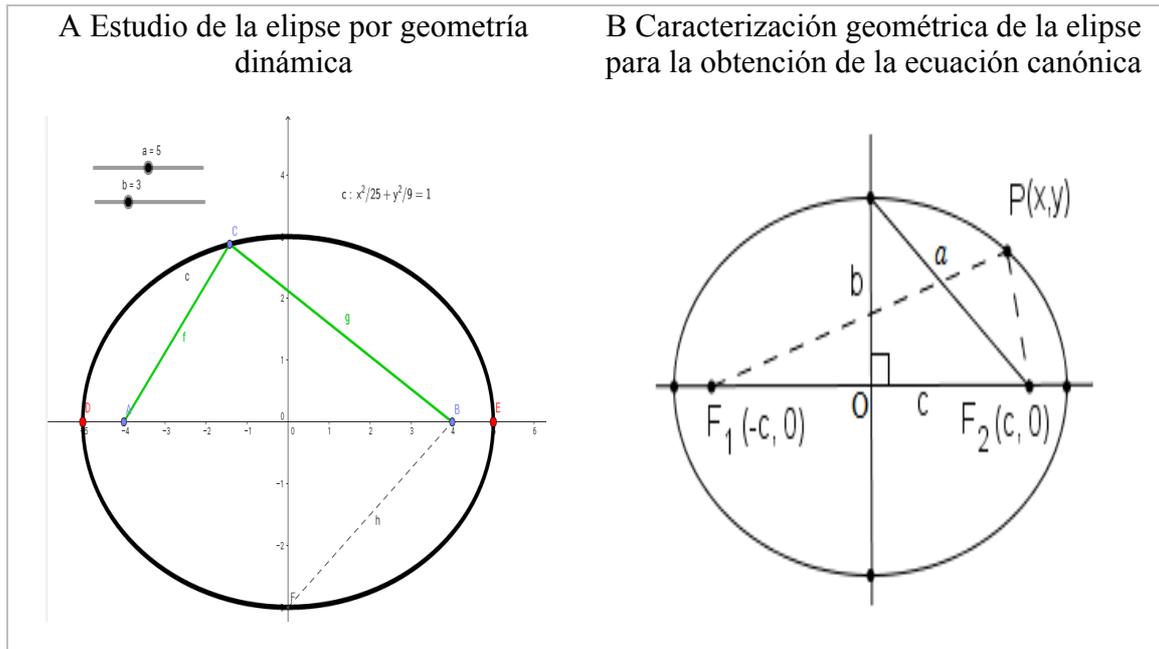


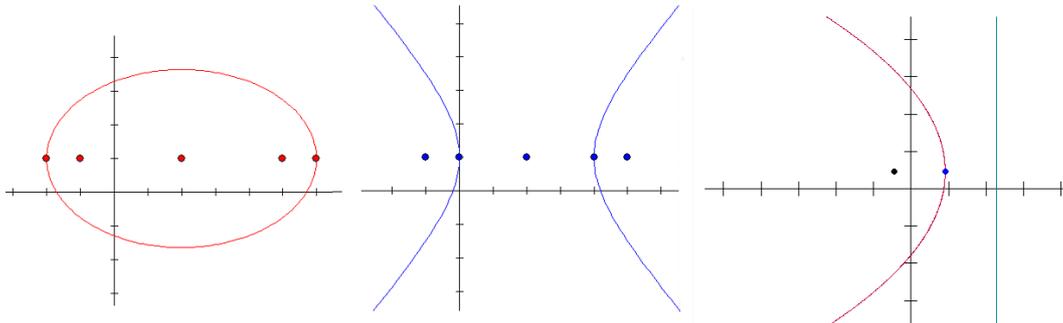
Figura 3. Caracterización de propiedades geométricas y algebraicas de la elipse.

Finalmente, para extender las posibles aplicaciones en el espacio tridimensional y brindar conocimiento adicional, se usó el programa *Mathematica* para la obtención de superficies de revolución y se explicaron las características básicas (Figura 4-B). Ese nuevo conocimiento fue usado para presentar aplicaciones concretas de superficies tridimensionales y en las que las características (equivalentes a las cónicas) son explotadas, como por ejemplo: (i) el modelado del planeta Tierra en el área de la Geodesia y su uso para el estudio de trayectorias alrededor del planeta (Figura 5-A); (ii) el puente hiperbólico en calle Corporation en Manchester-Inglaterra como aplicación en la arquitectura e ingeniería (Figura 5-B), y (iii) la cocina solar parabólica usada por la población que vive en Isla Venado (Costa Rica) y que usa las propiedades de reflexión de la luz a un foco.

Estos últimos ejemplos son de vital importancia para contextualizar la matemática, lo cual es una tarea regularmente pendiente en el currículo. La presentación de casos concretos en áreas profesionales permite al estudiante dar importancia al contenido en su formación, logrando que se compensen las ideas generalizadas sobre aplicaciones nulas o poco reales de la matemática en el mundo real o profesional (Molina, 2015). Además, la presentación de diferentes formas de aplicaciones logra generar competencias matemáticas así como una visión, reflexión y exploración diferente del uso de la matemática dadas las necesidades de la sociedad (Pérez, 2012). Esto es congruente con el paradigma del trabajo colaborativo, en las que no existe una única respuesta correcta, sino que hay diversas maneras de llegar al resultado y para ello los estudiantes deben compartir y llegar a acuerdos, hecho que les ayuda a ser más autónomos y maduros social e intelectualmente (Marin-Juarros et al., 2014).

Por otra parte, posterior a la finalización de actividades, se realizó una evaluación a los estudiantes participantes para determinar su apreciación con respecto al trabajo colaborativo, las actividades de doblado de papel y uso de las TICs. Los resultados de dicha encuesta se presentan en la Figura 6. En la encuesta se solicitó a los estudiantes indicar su nivel de acuerdo o desacuerdo en diversos tópicos, como lo son la suficiencia de los conocimientos previos para el desarrollo de las actividades, el papel del docente, la claridad de la guía de trabajo impresa, la interacción con los compañeros en función de la formulación de conjeturas, discusión y comprensión de los contenidos, la pertinencia del aprendizaje colaborativo en general y del doblado de papel y uso de las TICs específicamente, así como la utilidad de los contenidos en su área de estudio.

A Construcción de Secciones Cónicas a partir de puntos de la curva, focos y directriz usando el programa *Winlab*



B Creación de superficies de revolución a partir de Secciones Cónicas usando el programa *Mathematica*

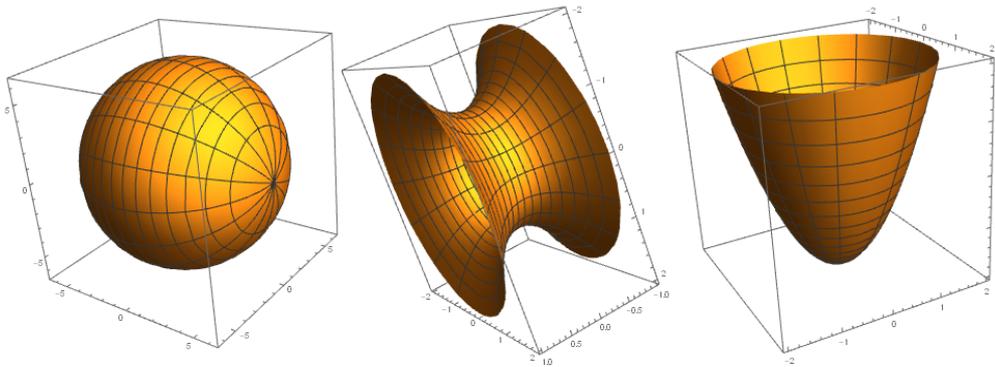
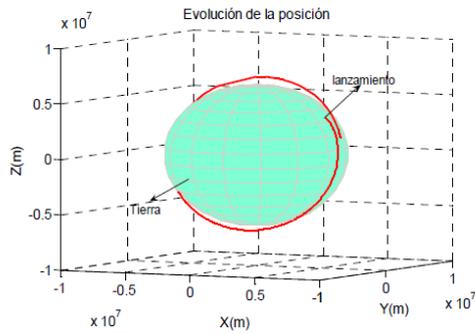


Figura 4. Utilización de programas especializados para la construcción de Secciones Cónicas y superficies de revolución asociadas.

A Elipsoide WGS84 del planeta Tierra y su aplicación para la descripción de trayectorias



B Puente hiperbólico en calle Corporation en Manchester, Inglaterra



C Cocina solar parabólica en Isla Venado, Costa Rica

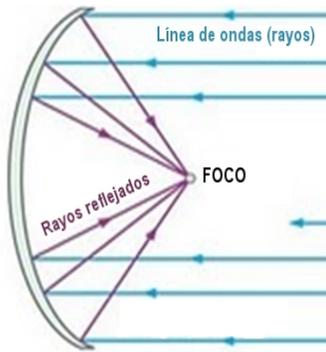


Figura 5. Aplicaciones de superficies de revolución asociadas a las Secciones Cónicas.

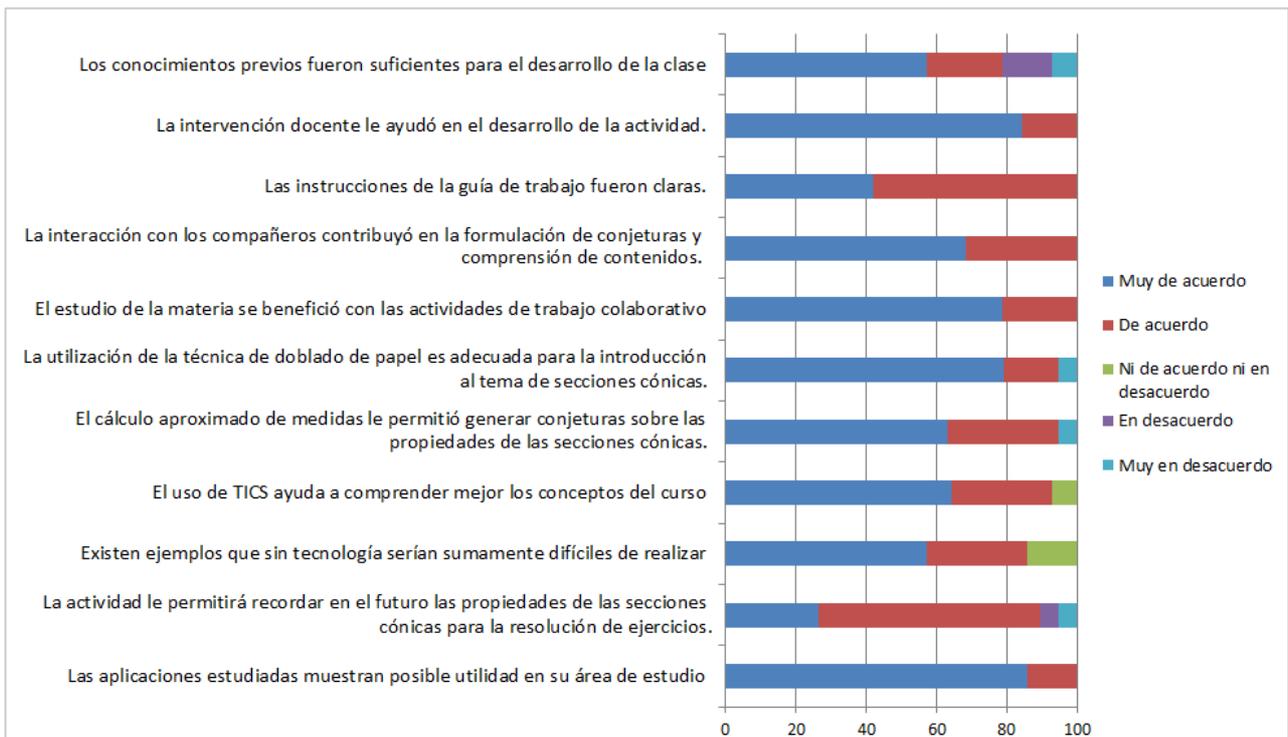


Figura 6. Valoración realizada por los estudiantes respecto a estrategia implementada con trabajo colaborativo, doblado de papel y TICs.

Como puede observarse en la Figura 6, la mayoría de los estudiantes se mostró muy de acuerdo o de acuerdo con las afirmaciones que fueron proporcionadas, lo cual evidencia un alto grado de satisfacción con la propuesta. A parte de esto, algunos estudiantes manifestaron haberse sentido cómodos al interactuar con sus compañeros y disfrutaron tener un papel protagónico en la construcción de su conocimiento, pues, como ellos mismos indicaron, es una forma no tradicional de apropiarse de los contenidos.

Es así como se evidencia que la propuesta implementada ha permitido que los estudiantes se involucren socialmente en la construcción del conocimiento referente al estudio de las Secciones Cónicas, así como la adquisición de criterios para gestionar dicho contenido, reconocer y validar sus propias ideas con los demás y validar las ideas de pares, generar ideas del colectivo como aporte de cada individual y adoptar nuevas perspectivas como consenso grupal. Desde la perspectiva del docente, las principales ventajas derivadas del uso de estrategias de aprendizaje colaborativo llevan al desarrollo y mejora continua de las competencias del docente para ejercer el apoyo y acompañamiento responsables y creativos (Calzadilla, 2002). Entre las limitaciones de la propuesta se destaca el acceso que pueden tener los estudiantes a una computadora o a los programas utilizados fuera del horario del curso, y la gran cantidad de tiempo que requiere la implementación de las distintas actividades.

En el caso de la axiomática del doblado de papel, se pueden seguir proponiendo estrategias didácticas para la construcción de cada sección cónica y su definición como lugar geométrico, y que se complementen con las actividades TICs para una mejor visualización y comprobación de conjeturas. En este sentido, se resalta la idea de que las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos (Pérez, 2012). Por lo tanto, se intenta colocar a los participantes del proceso educativo en una situación de mutuo aprendizaje y de construcción del pensamiento matemático.

IV. CONCLUSIONES

Se presentó una experiencia de la integración del aprendizaje colaborativo para el estudio de las Secciones Cónicas, en el cual se involucró el doblado de papel y las TICs como medio para la formulación de conjeturas, deducción de propiedades y reconocimiento de aplicaciones un curso de Cálculo intermedio, logrando un papel protagónico por parte del estudiante en la construcción de su conocimiento. Sin embargo, el estudio no es de carácter inferencial, sino que pretende describir la estrategia que se ha implementado.

Se comprobó que el trabajo en equipo, la manipulación de materiales concretos, como es el caso del doblado de papel y la toma de medidas en las figuras, así como el uso de herramientas tecnológicas, contribuyen a la visualización espacial, la comprobación de conjeturas y la deducción de propiedades que permiten al estudiante no solo comprender a profundidad los conceptos que aplicará en la resolución de ejercicios, sino también adentrarse en el estudio de las Secciones Cónicas para resolver problemas y reconocer aplicaciones de las mismas en la vida cotidiana, lo cual genera motivación en el estudiantado. Todo esto en un marco de colaboración entre pares que modela el trabajo de los profesionales en el campo en el cual se desarrollan. En conjunto, las diferentes actividades planteadas en la estrategia buscan integrar los contextos, los tipos de pensamiento con los conceptos, su representación, visualización y formación de conjeturas a fin de dar paso a procesos generales de la actividad matemática.

V. REFERENCIAS

- Alfaro, A. L., Alpízar, M. y Chaves, E. (2012). Recursos metodológicos utilizados por docentes de I y II ciclos de la educación general básica en la Dirección Regional de Heredia, al impartir los temas de probabilidad y estadística. *Uniciencia*, 26(1y2), 135–151.
- Aznar, A. (2011). El plegado en papel como herramienta de apoyo en la enseñanza artística. *Revista Iberoamericana de Educación*, 57(1), 1–10.
- Calderón, W. (2013). *Propuesta metodológica para la enseñanza de las secciones cónicas en el grado décimo de la institución educativa villas de san ignacio de bucaramanga* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- Calzadilla, M. E. (2002). Aprendizaje colaborativo y tecnologías de la información y la comunicación.

- Revista Iberoamericana de Educación*, 29(1), 1-10. Recuperado de <https://rieoei.org/deloslectores/322Calzadilla.pdf>
- Cascante, N. y Marín, P. (2012). *Didáctica Universitaria: experiencias docentes en la Universidad de Costa Rica*. San José, Costa Rica: Editorial SIEDIN.
- Chavarría-Arroyo, G. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Uniciencia*, 28(2), 15–44.
- Gatica, S. N. y Ares, O. E. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. *EDMETIC* 1(2), 88–107.
- Glinz, P. (2005). Un acercamiento al trabajo colaborativo. *Revista Iberoamericana de Educación*, 36(7), 1-14.
- Maldonado, M. (2007). El trabajo colaborativo en el aula universitaria. *Laurus: Revista de Educación*, 13(23), 263–278.
- Marin-Juarros, V. I., Negre-Bennasar, F. y Pérez-Garcias, A. (2014). Entornos y redes personales de aprendizaje (PLE-PLN) para el aprendizaje colaborativo. *Comunicar*, 21(42), 35–43.
- Molina, J. (2015). Experiencia basada en la triada TICs, enseñanza por proyectos y modelado para la enseñanza de sistemas de ecuaciones diferenciales. *Uniciencia*, 29(2), 46–61.
- Pérez, I. (2012). *Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- Ramírez, R. H. (2013). *Las Secciones Cónicas en la Escuela Secundaria: un Análisis Matemático y Didáctico* (tesis de especialidad). Universidad Nacional de General Sarmiento, Buenos Aires.
- Rius, M. (1989). *Grafomotricidad: Enciclopedia del desarrollo de los procesos grafomotores*. Madrid, España: Editorial Seco Olea.
- Santa, Z. y Jaramillo, C. (2010). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica Del Norte*, 31, 338–362.
- Tobon, S. (2007). *Formación basada en competencias*. Bogota, Colombia: Ecoe Ediciones.
- Vicerrectoría Académica Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. (2000). *Las estrategias y técnicas didácticas en el rediseño: Capacitación en estrategias y técnicas didácticas*. México: Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Recuperado de http://sitios.itesm.mx/va/dide/documentos/inf-doc/Est_y_tec.PDF