

Procesos emisores de fotones en dispersión de electrones

C.W. Soto Vargas
Universidad de Costa Rica
Escuela de Física, San José, Costa Rica
(recibido 17 junio 1996, aceptado setiembre 1996)

Abstract: The investigations involving the scattering cross sections arising in virtual and real photon emission processes of electron and positron scattering by an atomic nucleus, have the need for thorough and complete calculations of the virtual photon spectrum and the bremsstrahlung related radiation tail. We make a complete review of the plane wave calculations and then introduce the distorted wave formulation, which is mathematically involved and numerically elaborated, but accessible to its use in experimental electron scattering facilities.

Subject headings: virtual photon spectrum, radiation tail, electron scattering, distorted wave Born approximation

Resumen: Las investigaciones que involucran las secciones eficaces que surgen en procesos de emisión de fotones virtuales y reales de la dispersión de electrones y positrones por un núcleo atómico, tienen la necesidad de cálculos extensos y completos del espectro virtual de fotones y de la llamada cola de radiación, relacionada esta última con el bremsstrahlung. Se hace una revisión completa de los cálculos con ondas planas y luego se introduce la formulación de ondas distorsionadas, que es matemáticamente involucrada y numéricamente elaborada, pero accesible su uso en instalaciones experimentales de dispersión de electrones.

Encabezados de materia: Procesos emisores de fotones en dispersión de electrones

1. Introduction

La dispersión de electrones ha probado ser una herramienta útil en la investigación del núcleo atómico. Esta utilidad emana de varias razones, pero básicamente dos de ellas dan a los electrones la capacidad de ser excelentes partículas de prueba de la estructura nuclear. Primero, la teoría de la electrodinámica cuántica es una de las partes de la física moderna más firmemente establecida, por lo que la interacción del electrón con la carga electromagnética y la densidad de corriente del núcleo se comprende bien y puede manipularse con confianza. La interacción es relativamente débil, (del orden de la constante de estructura fina $\alpha_f = 1/137$), pero las secciones eficaces son suficientemente grandes para ser cómodamente medibles. Esta faceta también implica que la medición en sí no afecta grandemente la estructura del blanco. Esto debe contrastarse con las bien conocidas dificultades encontradas con neutrones, protones, partículas alfa y otros proyectiles de interacción fuerte, donde el proceso de dispersión en sí no puede distinguirse con claridad de los efectos en la estructura del blanco. La segunda ventaja básica de la dispersión de electrones surge cuando se compara a los procesos foto-nucleares, en los que un fotón real excita estados discretos del núcleo. Cuando un fotón real excita un nivel a una energía $\hbar\omega$ por encima del estado fundamental, entonces el momento transferido al núcleo es $\hbar\omega/c$. En contraste, un electrón puede excitar el mismo nivel pero el momento transferido puede variar de $\hbar\omega/c$ hasta aproximadamente el doble del momento inicial del electrón. Esta faceta es de gran utilidad cuando se hace asignaciones de espín y paridad a los niveles nucleares, o cuando se estudian los factores de forma electromagnéticos.

Históricamente, la teoría de dispersión de electrones como se conoce hoy empezó con la formulación relativista del electrón de Dirac (Dirac 1928). Esto fue seguido el año siguiente con la publicación de la famosa "fórmula de Mott" (Mott 1929), donde, por primera vez, la sección eficaz relativista para la dispersión de partículas de Dirac fue obtenida para el caso de núcleos punto como blancos. No fue sino hasta la década de los 50 cuando estudios experimentales de gran escala fueron llevados a cabo siguiendo el desarrollo de cada vez más poderosos aceleradores. El estado fundamental de los núcleos fue primeramente estudiado; después las distribuciones de carga y de momento magnético de sistemas de pocos nucleones. Hofstadter y sus colaboradores lograron mucho, incluyendo las ahora famosas distribuciones de carga del estado fundamental de núcleos complejos (Hofstadter 1956, Hofstadter 1957, Hofstadter 1964). El advenimiento de aceleradores de todavía más energía y mejores espectros en las décadas de los 60s y 70s, han permitido a los experimentalistas de dispersión de electrones obtener grandes cantidades de datos sobre muchos aspectos de núcleos complejos: mediciones de la dispersión elástica y los niveles fundamentales fueron hechos otra vez pero con mucho más altas exactitudes, se estudiaron los niveles inelásticos y la desintegración de núcleos por medio de la dispersión de electrones. Debe mencionarse, por completitud, que algunos de los haces de electrones son hoy tan energéticos que la producción de piones y otros procesos de alta energía que entonces surgen naturalmente ya reciben considerable atención en dichas instalaciones de aceleradores. Paralelamente a todos estos avances en el lado experimental de la dispersión de electrones, los cálculos teóricos han sugerido, primero usando ondas planas, y cuando la precisión experimental aumentó y núcleos más pesados fueron investigados, se desarrolló un tratamiento más sofisticado usando expansiones de ondas parciales por medio de funciones de onda distorsionadas.

Existe un número esencial de artículos básicos y libros en adición a los ya mencionados trabajos de Hofstadter; el lector es referido a ellos para más detalles. Algunos son: Corson y Hansen 1953; Ravenhall 1958; Schiff 1958; Herman y Hofstadter 1960; Elton 1961; Rose 1961; Barber

1962; Hofstadter 1963; Ciocchetti y Molinari 1964; Biedenharn y Brussaard 1965; Bishop 1965; de Forest y Walecka 1966; Goldemberg y Pratt 1966; Rose 1966; Griffy y Schiff 1967; Überall 1968; Eisenberg y Greiner 1970; Überall 1971; Bertozzi 1975; Donnelly y Walecka 1975; Soto Vargas, Wright y Onley 1977; Talwar, Wright y Soto Vargas 1987; Sud y Soto Vargas 1994.

2. Consideraciones Generales

En dispersión de electrones es usual fijar la energía del electrón incidente y detectar ya sea el electrón dispersado en función del ángulo de dispersión y la pérdida de energía, o bien no observar el electrón saliente directamente sino examinar los procesos nucleares que resultan de la interacción de fotones reales o virtuales creados por la dispersión del haz de electrones incidentes. En dispersión inelástica de electrones, la respuesta del núcleo blanco se mide como una función de la energía transferida, y en el caso de espectros de fotones (reales y virtuales), se requiere del número mínimo de fotones creados en función de la pérdida de energía del electrón. Para un electrón relativista incidente interactuando con el campo electromagnético del núcleo, hay entonces dos procesos básicos de radiación que pueden ocurrir: emisión de fotones virtuales y reales. Se describirán ambos procesos básicos de radiación con la anterior formulación de ondas planas y luego con la posterior y significativamente mejorada técnica de ondas distorsionadas.

La cinemática del problema de dispersión de electrones puede presentarse gráficamente con la siguiente figura:

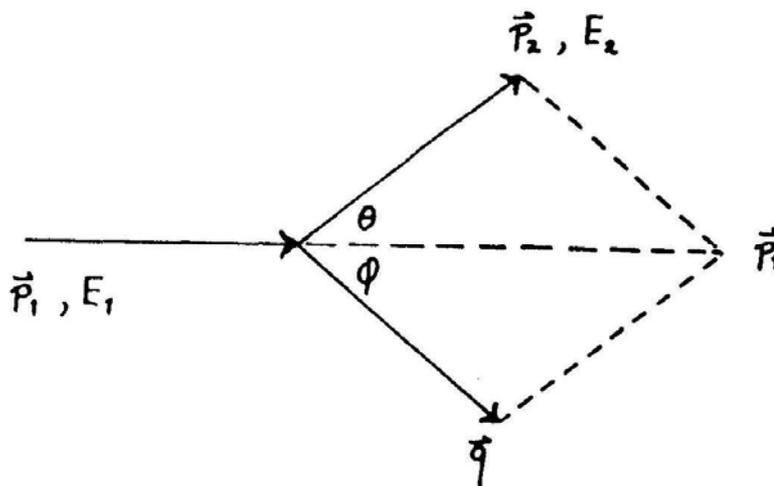


Fig.1: Diagrama cinemático para dispersión de electrones

La figura (1) esquematiza un electrón incidente de energía E_1 y momento \vec{p}_1 que es dispersado por un núcleo pesado inicialmente en reposo. El electrón saliente procede con energía E_2 y momento \vec{p}_2 , mientras que el núcleo blanco tiene ahora un momento de retroceso \vec{q} . Los ángulos θ y ϕ representan respectivamente el ángulo de dispersión del electrón y el ángulo de recule del núcleo. Las ecuaciones cinemáticas para este proceso se obtienen de principios conservacionales

$$\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \vec{q}$$

$$E_1 - E_2 = E \quad (1)$$

donde $T = q^2/2M$, la energía de recule del núcleo pesado, es pequeña y despreciable. E es la energía transferida al núcleo, y, asumiendo niveles de energía suficientemente angostos, se escribe simplemente $E \cong \omega$.

De la primera de las ecuaciones (1) se puede observar una faceta no presente cuando el núcleo es bombardeado con fotones reales: la posibilidad de variar el momento mientras se mantiene la energía transferida constante. Las reacciones fotonucleares involucran la absorción de una energía ω que también es igual al momento transferido q (se usará el esquema de trabajo $\hbar = c = 1$), y por lo tanto solo pueden explorar estados excitados. La dispersión de electrones, en la otra mano, puede explorar no solo estados excitados, sino probar en estado fundamental. El procedimiento de mantener la energía constante mientras se varía el momento puede servir como herramienta para explorar la variación de la fortaleza de excitación del nivel como una función de q (Überall 1971).

Antes de proceder con la discusión del espectro de fotones virtuales y la emisión de fotones reales (bremsstrahlung), una palabra debe ser dicha en referencia a las razones de por qué la cola de radiación causada por el bremsstrahlung que degrada a los electrones necesita calcularse. Cuando electrones de energía incidente E_1 son dispersados, un fuerte pico elástico es observado junto a la cola de radiación debido a la emisión de fotones reales. La figura (2) ilustra este fenómeno.

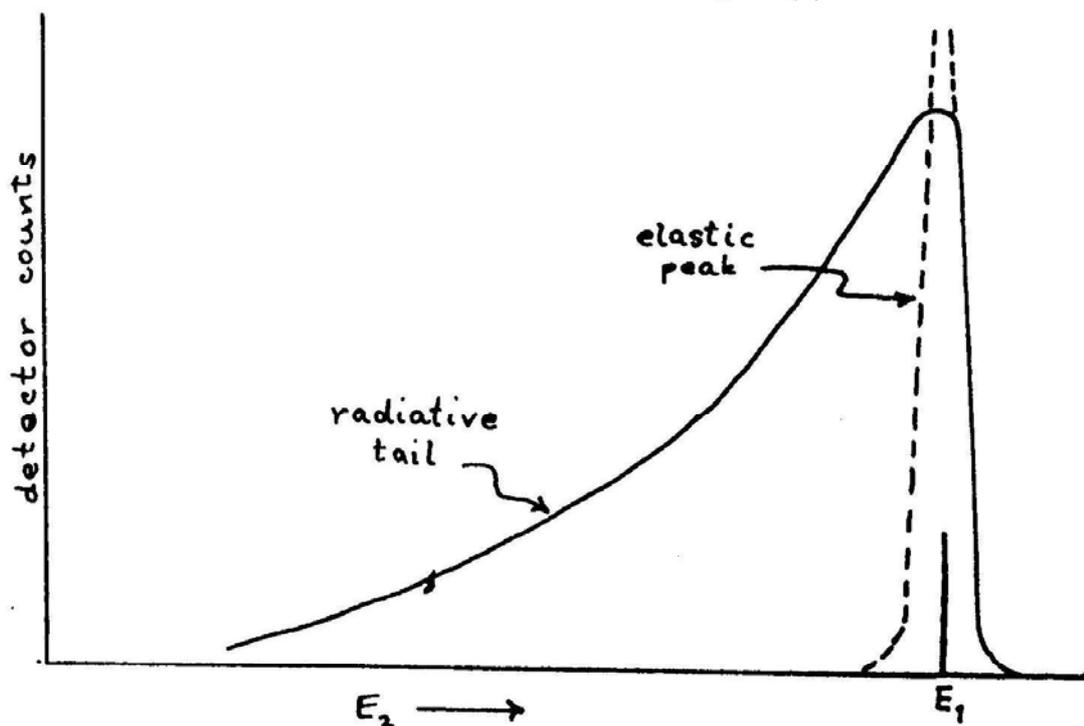


Fig.2: Pico elástico cualitativo típico y cola de radiación que surgen en dispersión experimental de electrones

El experimentalista, en adición al pico elástico, está también interesado en llevar a cabo mediciones y análisis de los estados excitados del núcleo, tanto discretos como en el continuo. Considere el caso de estados discretos bajos ilustrados en la figura (3):

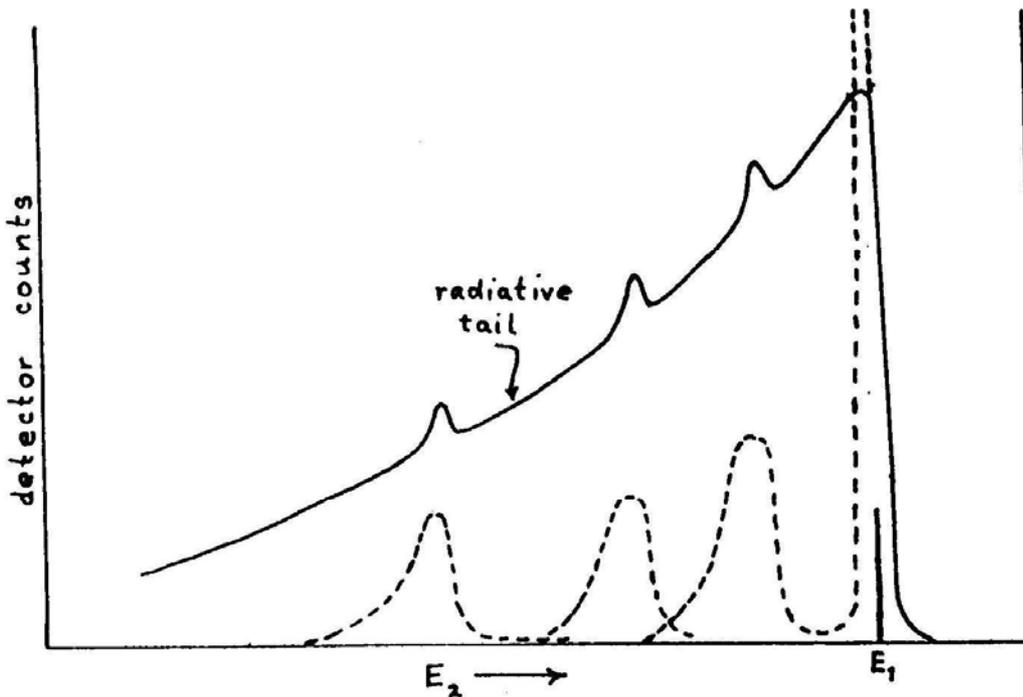


Fig.3: Picos elásticos e inelásticos cualitativos típicos y cola de radiación que surgen en dispersión experimental de electrones

Se observa que los picos inelásticos están enmascarados por la cola de radiación elástica, y un cálculo exacto y preciso de dicha cola es necesario en orden de sustraerlo para exponer la fortaleza de los picos inelásticos tal como se muestra en la figura (3). Este proceso de resta es todavía más crítico cuando el sistema tiene estados excitados en un continuo. Generalmente estos son mucho más anchos en energía, por lo que la posibilidad de empíricamente restarlos de la cola de radiación se torna más difícil.

Existen otras correcciones radiativas a la dispersión elástica, pero son bastante más pequeñas y han sido tratadas con exitosamente (Schwinger 1948, 1949 a, 1949 b) y (Meister y Griffy 1964). Algunas de estas son: emisión y reabsorción de cuanta virtual, polarización del vacío y emisión de fotones suaves no observados. Otros efectos bien conocidos son la ionización de átomos y las colisiones electrónicas.

Cálculos mecánico cuánticos tempraneros del espectro de fotones virtuales y de la sección eficaz de bremsstrahlung fueron hechos bajo la estructura de trabajo de la aproximación por ondas planas. (Para un tratamiento clásico o semiclásico, ver la referencia Jackson 1975). Los diagramas de Feymann esquematizan las interacciones electrón-núcleo en las siguientes dos figuras. Los procesos son de primer y segundo orden respectivamente, o sea, un (dos) intercambios de fotones, y el carácter de onda plana se muestra como líneas rectas sólidas para electrones. (Para diagramas de Feymann de orden superior, y los diagramas de correcciones radiativas, véase la referencia Überall 1971).

$$q = p_1^2 + p_2^2 + k^2 - 2p_1k \cos \theta_1 + 2p_2k \cos \theta_2 \\ - 2p_1p_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi)$$

donde θ_1 (θ_2) es el ángulo entre \vec{k} y \vec{p}_1 (\vec{p}_2) y φ es el ángulo entre los planos $(\vec{p}_1\vec{k})$ y $(\vec{p}_2\vec{k})$. La inclusión de los efectos del recule nuclear pueden ser de alguna importancia para núcleos de Z bajo, las cuales reciben un gran momento trasferido \vec{q} ; esas modificaciones a la fórmula de Bethe-Heitler aparecen en las referencias (Drell 1952, Schiff 1952).

En la dispersión de electrones se esta normalmente interesado en detectar al electrón, y entonces sería de interés obtener una sección eficaz diferencial en términos del ángulo de dispersión del electrón θ y de la energía del fotón k . Esto involucra que se escoja un sistema de coordenadas apropiado y que se integre sobre ángulos de fotón y q^2 . Existen tales cálculos, (Racah 1934, Schiff 1952; Mc Cornick, Keiffer, y Parzen 1956; Maximon e Isabelle 1964), pero solamente el último no involucra aproximación. De esa referencia, y en unidades de energía y momento de m , se toma la siguiente expresión para la sección eficaz de bremsstrahlung:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dk} = \frac{e^2}{2\pi} \left(\frac{Ze^2}{m}\right)^2 \frac{p_2}{p_1 k} \left\{ 2 \frac{k^2\lambda + (2E_1E_2 - \lambda)(\lambda + 1)}{\lambda^2 [\lambda(\lambda + 2)]^{1/2}} \times \ln \left(\lambda + 1 + [\lambda(\lambda + 2)]^{1/2} \right) \right. \\ + \frac{k}{\lambda^2 p_2^3} [-2kE_2p_2^2 + 3E_2(E_1 + E_2) - (p_1^2 + p_2^2) + (2E_1E_2 - \lambda)(E_1E_2 + p_2^2) \\ + \left. \frac{2E_2p_1^2 \sin^2 \theta (2E_1p_2^2 - 3kE_2^2)}{\lambda^2} \right] \ln(E_2 + p_2) - \frac{k}{\lambda^2 p_1^3} [2kE_1p_1^2 + 3E_1(E_1 + E_2) \\ - (p_1^2 + p_2^2) + (2E_1E_2 - \lambda)(E_1E_2 + p_1^2) + \left. \frac{2E_1p_2^2 \sin^2 \theta (2E_2p_1^2 + 3kE_1^2)}{\lambda^2} \right] \ln(E_1 + p_1) \\ + \frac{2k^2 \sin^2 \theta}{\lambda^4 p_1^2 p_2^2} \left[2p_1^2 p_2^2 (E_1^2 + E_2^2 - E_1E_2) + 3k^2 (E_1 + E_2)^2 \right] + \frac{k^2}{\lambda^2 p_1^2 p_2^2} \left[(p_1^2 + p_2^2)(E_1E_2 + 1) \right. \\ \left. - (2E_1E_2 - \lambda)(p_1^2 + p_2^2 + E_1E_2 + 1) - 3(E_1 + E_2)^2 \right] - \frac{2}{\lambda^2} [2E_1E_2 - \lambda] \left. \right\}. \quad (7)$$

En la expresión (7), se ha tomado $\hbar = c = 1$; también

$$\lambda = E_1E_2 - p_1p_2 \cos \theta - 1.$$

La idea de un espectro de fotones virtuales se origina con las publicaciones de las referencias (Weizäcker 1934 y Williams 1935) en donde el efecto del paso de una partícula cargada cerca de un centro de dispersión se demuestra que es aproximadamente equivalente a la incidencia de un estallido de radiación con distribución de energía $N^{(\lambda L)}(E_1, \omega)$, donde $\omega = E_1 - E_2$ y (λL) denotan las componentes de multipolo ($(E2)$, $(M1)$, etc.). En este respecto, la electroexcitación de núcleos

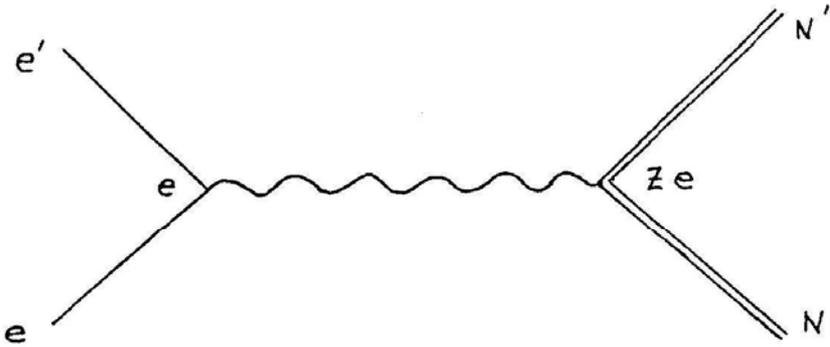


Fig.4: Diagrama de intercambio de un fotón para dispersión electrón-núcleo

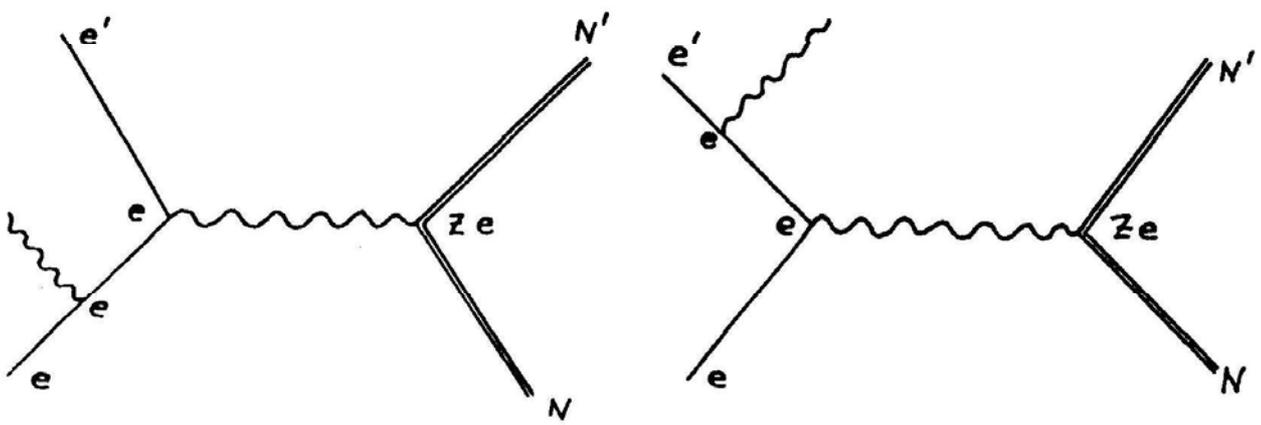


Fig.5: Posibles diagramas de emisión de fotón durante dispersión electrón-núcleo

Las soluciones de onda plana

$$\psi = ue^{i\vec{p}\cdot\vec{r}-iEt} \tag{2}$$

satisfacen la ecuación de Dirac para el electrón libre (Eisenberg y Greiner 1970)

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \psi = E\psi. \tag{3}$$

En las ecuaciones (2) y (3), los siguientes operadores, variables y funciones de onda son usados

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

siendo $\vec{\sigma}$ los operadores de espín de Pauli e I la matrix unitaria 2×2 ; $E(p)$ es la energía (momento) del electrón, m es su masa (algunas veces indicada como m_e para evitar confusión con los estados de espín). La u representa el espinor cuádruple que surge de la solución de la ecuación (3), y que representa la combinación de dos diferentes estados de espín y de dos estados de energía $\pm E$ (las soluciones $-E$ son identificadas con positrones).

En el cálculo de la sección eficaz de bremsstrahlung en aproximación de primer orden (Bethe y Heitler 1934; Heitler 1954), la interacción total es dada por

$$H = H_{\text{int}} + V \quad (4)$$

donde H_{int} es la interacción del electrón con el campo de radiación que da origen a la emisión del fotón real, y V es la interacción del electrón y el campo Ze/r . La primera aproximación usa una expansión en potencias de Ze^2 , y esto impone limitaciones al rango de aplicabilidad de este camino, explícitamente

$$\frac{Ze^2}{v_1} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{Ze^2}{v_2} \ll 1,$$

donde v_1 (v_2) es la velocidad inicial (final) del electrón. La probabilidad de transición por unidad de tiempo está dada en términos de los elementos de matriz para H_{int} y V , usando funciones de onda del tipo de la ecuación (2): (nótese que $\tau_{2,1}$ representa un elemento de la matriz de segundo orden)

$$\omega = 2\pi |\tau_{2,1}|^2 \rho_2 \quad (5)$$

donde ρ_2 es la densidad de los estados finales por diferencial de energía dE_2 . La sección eficaz bremsstrahlung es obtenida dividiendo la ecuación (5) entre el flujo incidente (velocidad del electrón incidente), el resultado siendo la bien conocida fórmula de Bethe-Heitler

$$\begin{aligned} d\sigma = & \frac{Z^2 e^4}{2\pi (137)} \frac{dk p_2 \sin \theta_2 d\theta_2 \sin \theta_1 d\theta_1}{k p_1 q^4} \\ & \times \left\{ \frac{p_2^2 \sin^2 \theta_2}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)^2} (4E_1^2 - q^2) + \frac{p_1^2 \sin^2 \theta_1}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)^2} (4E_2^2 - q^2) \right. \\ & - \frac{2p_1 p_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} (4E_1 E_2 - q^2 + 2k^2) \\ & \left. + 2k^2 \frac{p_1^2 \sin^2 \theta_1 + p_2^2 \sin^2 \theta_2}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

En la relación anterior el recule del núcleo ha sido omitido, \vec{k} es el momento del fotón, mientras que $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{k}$ es el momento trasferido al núcleo y cuya magnitud es (el subscrito 1 (2) indica las condiciones iniciales (finales))

está permanentemente relacionada al correspondiente proceso de fotoexcitación: en ambos casos el núcleo recibe su energía de excitación por medio de la interacción de un campo electromagnético con cargas y corrientes nucleares.

Si $\sigma_f^{(\lambda L)}(\omega)$ es la sección eficaz de foto-absorción para fotones de carácter multipolar (λL) y energía ω que desembocan en un estado particular (o clase de estados finales) f , entonces la sección eficaz para la producción de estados finales f debido al bombardeo de electrones de energía E_1 es

$$\sigma_f(E_1) = \int_0^{E_1-m} \sum_{\lambda L} \sigma_f^{(\lambda L)}(\omega) N^{(\lambda L)}(E_1, \omega) \frac{d\omega}{\omega}. \quad (8)$$

En otras palabras, el experimentalista de electrones está interesado en el cálculo del espectro de fotones virtuales $N^{(\lambda L)}(E_1, \omega)$ para así plegarlo con la sección eficaz de foto-absorción medida y por lo tanto obtener $\sigma_f(E_1)$; o bien inversamente, medir $\sigma_f(E_1)$ y desplegar la ecuación (8) para obtener la sección eficaz de foto-absorción. En la ecuación (8), $E_1 - m$, la energía cinética del electrón, es el límite superior de la energía transferida al núcleo.

Cálculos tempranos usaron PWBA (aproximación de Born con ondas planas) para calcular este espectro e incluían no solo la excitación del dipolo eléctrico $E1$, sino además otras componentes multipolares ($E2$), ($M1$), etc.) también. Seguidamente aparecen expresiones para algunos de los más interesantes multipolos (Thie, Mullin y Guth 1952):

$$N^{(E1)} = \frac{\alpha_{f.s.}}{\pi} \left[-2 \frac{p_2}{p_1} + \frac{E_1^2 + E_2^2}{p_1^2} \ln \xi \right], \quad (9)$$

$$N^{(E2)} = \frac{\alpha_{f.s.}}{\pi} \left[\frac{8}{3} \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{m^2 + E_1 E_2}{\omega^2} \right) + \frac{E_1^2 + E_2^2 - 2m^2}{p_1^2} \ln \xi \right], \quad (10)$$

$$N^{(E3)} = \frac{\alpha_{f.s.}}{\pi} \left[\frac{p_2}{p_1} \left(2 + \frac{4E_1^2 E_2^2 + 4E_1 E_2 m^2 - 8m^4}{\omega^4} + \frac{9E_1 E_2 - m^2}{\omega^2} \right) + \frac{E_1^2 + E_2^2 - 4m^2}{p_1^2} \ln \xi \right], \quad (11)$$

y

$$N^{(M1)} = \frac{\alpha_{f.s.}}{\pi} \left[\frac{E_1^2 + E_2^2 - 2m^2}{p_1^2} \ln \xi \right], \quad (12)$$

donde

$$\xi = \frac{(E_1 E_2 + k_1 k_2 - m^2)}{m\omega}.$$

Estos resultados son válidos para electrones con energías incidentes hasta talvez cien MeV. Para energías incidentes más altas, se tienen que considerar los efectos de tamaño finito y cuestionar la

validez del concepto de espectro virtual. Aparte de la referencia anterior, una discusión adicional se encuentra en las referencias (Dalitz y Yennie 1957, y Bishop 1965).

Los cálculos de $N^{(\lambda L)}$ en PWBA no son siempre satisfactorios en el tanto que las expresiones no dependen de la carga atómica Z del núcleo blanco. Que tal dependencia no es insignificante, puede observarse comparando dispersiones de positrones y electrones (Nascimento, Wolyneć y Onley 1975). Revertir el signo de Ze^2 evidentemente tiene un efecto medible en la sección eficaz, particularmente grande para Z grande. En la siguiente sección se presenta un análisis usando ondas distorsionadas, este procedimiento siendo considerablemente más elaborado que el que usa ondas planas. El análisis con ondas distorsionadas dará pie a las integrales radiales de Dirac-Coulomb, las cuales se estudiarán en un artículo subsiguiente.

3. Radiación de Fotones Virtuales y Reales en Análisis por Ondas Distorsionadas

Antes de proceder a la formulación por ondas distorsionadas de la emisión de fotones virtuales y reales, se hará una corta revisión de la expansión multipolar del campo electromagnético.

Las ecuaciones para potenciales electromagnéticos son las conocidas

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, t)$$

y

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (13)$$

donde el potencial vectorial está dado por \vec{A} mientras que φ es el potencial escalar. \vec{E} es el campo eléctrico y \vec{B} es la inducción magnética.

Las ecuaciones (13) pueden ser fácilmente desacopladas introduciendo una condición de calibración, en particular la calibración de Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec{r}, t) = 0. \quad (14)$$

Entonces se obtiene, usando las ecuaciones de Maxwell,

$$\vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(\vec{r}, t) = -4\pi\rho(\vec{r}, t)$$

y

$$\vec{\nabla}^2\vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(\vec{r}, t) = -4\pi\vec{J}(\vec{r}, t), \quad (15)$$

las fuentes de carga y corriente siendo ρ y \vec{J} respectivamente. Los potenciales son explícitamente (Gargaro 1970)

$$\varphi(\vec{r}) = \int G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') d\vec{r}'$$

y

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \vec{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (16)$$

(la dependencia en el tiempo $e^{-i\omega t}$ siendo sobreentendida en las soluciones completas) donde la expansión multipolar en funciones de Green escalar y diádica en (Biedenharn 1962, Morse and Feshbach 1953)

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = 4\pi i \omega \sum_{L,M} j_L(\omega r_{<}) h_L^1(\omega r_{>}) Y_L^{M*}(\hat{r}') Y_L^M(\hat{r})$$

y

$$\vec{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}') = 4\pi i \omega \sum_{\substack{L,M \\ L'=L, L\pm 1}} j_{L'}(\omega r_{<}) h_{L'}^1(\omega r_{>}) \vec{Y}_{L,L'}^{M\dagger}(\hat{r}') \vec{Y}_{L,L'}^M(\hat{r}). \quad (17)$$

Y y \vec{Y} son las esféricas armónicas ordinarias y las esféricas armónicas vectoriales respectivamente, y $j(h^1)$ es la función esférica de Bessel (Hankel). La coordenada del electrón (el fotón se origina en el electrón) para un fotón hacia adentro que será detectado en el origen (fotón virtual causando la transición nuclear) es $r_{>}$ (el más grande de r y r') y así el fotón debe tener la forma de j_L para la onda regular estacionaria. Contrariamente la coordenada del electrón para un fotón hacia afuera (fotón real a ser detectado en el infinito) es $r_{<}$ (el más pequeño de r y r') y entonces la onda saliente del fotón tiene la forma de h_L^1 .

Debe notarse que el espectro de fotones virtuales es una suma incoherente de componentes de multipolo eléctrico y magnético. También, la respuesta nuclear es tal que en general uno o dos multipolos dominan, y entonces el espectro de fotones virtuales se presenta en componentes de multipolos separados. Sin embargo, la radiación real se detecta en el infinito, donde no hay preferencia de multipolos y por lo tanto se debe sumar sobre muchas contribuciones. La convergencia de esta suma multipolar ha sido establecida (Talwar, Wright, Onley y Soto Vargas 1987).

Tal como fue discutido en la sección anterior, un cálculo mejorado de los procesos de electrones requiere ir más allá de la aproximación de ondas planas. Esto se hace resolviendo la ecuación de Dirac en presencia del potencial estático esférico simétrico de Coulomb. En coordenadas esféricas esto lleva a una expansión por ondas parciales de las funciones de onda. La emisión de fotones que llevan energía y momento es tratada en aproximación de Born de primer orden (Gargaro y Onley 1971) como se muestra en la figura (6) donde el uso de líneas de curvas denota ondas distorsionadas de Coulomb.

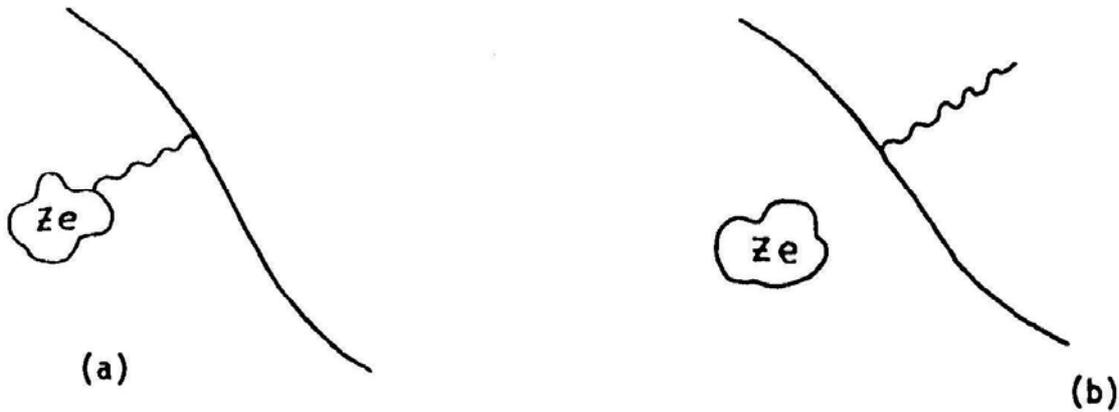


Fig.6: Diagrama de ondas distorsionadas para emisión
a) virtual y b) real de fotones

Introduciendo en la ecuación (3) una energía potencial central $V(r)$ y transformando el término de energía cinética $\vec{\alpha} \cdot \vec{p}$, la ecuación de Dirac-Coulomb en coordenadas polares es (Rose 1961)

$$\left[-i\alpha_r \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{\beta K}{r} \right) + V(r) + \beta m \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (18)$$

donde $K = (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1)$, el operador de Dirac, ha sido introducido; tiene valor propio $-\kappa$. Otros momentos angulares que han de ser usados son $j(\kappa) = |\kappa| - \frac{1}{2}$ y $l(\kappa) = \kappa$ para κ positivo y $l(\kappa) = -\kappa - 1$ para κ negativo.

El espinor de cuatro componentes $\psi(\vec{r})$ de la ecuación (18), puede escribirse como (Überall 1971)

$$\psi_{\kappa}^{\mu}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} g_{\kappa}(r) & \varphi_{\kappa}^{\mu}(\hat{r}) \\ if_{\kappa}(r) & \varphi_{-\kappa}^{\mu}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (19)$$

donde las φ 's son las funciones acopladas de orbital y de espín

$$\varphi_{\kappa}^{\mu}(\hat{r}) \equiv \varphi_{j\mu}^{(l)}(\hat{r}) = \sum_{m,m'} C(l, m, j; \mu - m', m') Y_{lm}(\hat{r}) \chi_{m'}$$

Aquí $Y_{lm}(\hat{r})$ representa la función orbital y las funciones de espín pueden tomarse como $\chi_{+} \equiv \chi_{\frac{1}{2}}$, $\chi_{-} \equiv \chi_{-\frac{1}{2}}$. En la ecuación (19), g y f son las conocidas funciones de onda de Dirac-Coulomb. La expansión por ondas parciales del espinor es

$$\psi(\vec{r}) = 4\pi \left(\frac{E + m_e}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\kappa, \mu} e^{i\delta_\kappa} i^l C \left(l, \frac{1}{2}, j; \mu - m, m \right) \times Y_l^{\mu - m}(\hat{p}) \psi_\kappa^\mu(\vec{r}) \quad (20)$$

donde δ_κ es cambio de fase puro de Coulomb y las funciones han sido apropiadamente normalizadas (Überall 1971). El subscrito e será añadido a la masa del electrón m cuando surja confusión con la proyección de espín m .

Las funciones de onda radiales de Dirac-Coulomb satisfacen ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma (Rose 1961):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} g_\kappa(pr) \\ f_\kappa(pr) \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 0 & (E + m - V(r)) \\ -(E - m - V(r)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_\kappa(pr) \\ f_\kappa(pr) \end{pmatrix} \\ + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\kappa - 1 & 0 \\ 0 & \kappa - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_\kappa(pr) \\ f_\kappa(pr) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (21)$$

donde

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r f_\kappa \\ r g_\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\left(\frac{E-m}{E+m}\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \frac{e^{\frac{\pi}{2}\eta} |\Gamma(\gamma + i\eta)|}{p(2pr)^{\frac{1}{2}} \Gamma(2\gamma + 1)} \begin{Bmatrix} \Im \\ \Re \end{Bmatrix} (\gamma + i\eta) \times \\ \times e^{-i(\gamma + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} e^{i\eta\kappa} M_{-\frac{1}{2} - i\eta, \gamma}(2ipr). \end{aligned} \quad (22)$$

En la expresión (22) M es la función de Whittaker (Whittaker y Watson 1927), y los cambios de fase punto de Coulomb son dados por

$$\eta_\kappa = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{1 + \mathcal{S}_\kappa}{2} \right) - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\eta(\kappa + \gamma m/E)}{\kappa\gamma - \eta^2 m/E} \right) \quad (23)$$

donde $\mathcal{S}_\kappa = \frac{\kappa}{|\kappa|}$. También $p = \sqrt{E^2 - m^2}$, $\gamma = (\kappa^2 - \alpha_{fs}^2 Z^2)^{\frac{1}{2}}$ y $\eta = \alpha_{fs} Z E / p$, α_{fs} siendo la constante estructura fina. Un segundo par de soluciones, irregulares en el origen, se obtiene cambiando el signo de γ en todos los lugares.

Se procede ahora con el cálculo del espectro de fotones virtuales bajo el formalismo de ondas distorsionadas. La interacción electromagnética electrón-núcleo tiene una densidad Hamiltoniana (Rose 1961) dada por

$$H_{\text{int}} = - \int \left[\hat{\rho}_e G(\vec{r}_e, \vec{r}_N) \rho_N(\vec{r}_N) - \vec{J}_e \cdot \vec{G}(\vec{r}_e, \vec{r}_N) \cdot \vec{J}_N(\vec{r}_N) \right] d\vec{r}_N \quad (24)$$

donde las coordenadas son las del núcleo (\vec{r}_N) o bien las del electrón (\vec{r}_e). \vec{J}_e ($\hat{\rho}_e$) es el operador de densidad de la corriente (carga) de transición del electrón, y \vec{J}_N ($\hat{\rho}_N$) son los correspondientes vectores nucleares. La amplitud de dispersión para la transición desde un estado inicial i hasta un estado final f es

$$\mathcal{H} = -4\pi \iint \left\{ \rho_e(\vec{r}_e) G(\vec{r}_e, \vec{r}_N) \rho_N(\vec{r}_N) - \vec{J}_e(\vec{r}_e) \cdot \vec{G}(\vec{r}_e, \vec{r}_N) \cdot \vec{J}_N(\vec{r}_N) \right\} d\vec{r}_e d\vec{r}_N, \quad (25)$$

donde, con la ayuda de las ecuaciones (20),

$$\begin{aligned} \rho_e(\vec{r}_e) &= \langle \psi_f | \hat{\rho}_e | \psi_i \rangle \\ \vec{J}_e(\vec{r}_e) &= \langle \psi_f | \hat{\vec{J}}_e | \psi_i \rangle \\ \rho_N(\vec{r}_N) &= \langle \psi_f^N | \hat{\rho}_N | \psi_i^N \rangle \\ \vec{J}_N(\vec{r}_N) &= \langle \psi_f^N | \hat{\vec{J}}_N | \psi_i^N \rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

El cálculo de \mathcal{H} involucra una manipulación un tanto larga, (Gargaro 1970 y Sud 1976), y aquí se dan solamente los resultados. La sección eficaz inelástica para dispersión de electrones en la teoría de perturbación de primer orden es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \left(\frac{dn}{dE_2} \right) S |\mathcal{H}|^2 / I_0 \quad (27)$$

donde la densidad de estados finales es dn/dE_2 , S implica el promedio sobre estados iniciales y sumando sobre estados finales de espín, e I_0 es el flujo incidente de electrones. Entonces, ya que no hay interferencia entre transiciones de diferente multipolaridad,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_L \left[\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{EL} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{ML} \right] \quad (28)$$

donde

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{EL} &= (4\pi\omega)^2 \alpha_{f.s.} (E_1 + m_e) (E_2 + m_e) \left(\frac{p_2}{p_1} \right) |\mathcal{N}_L^{\text{RED}}(\omega)|^2 \\ &\times \frac{1}{2L+1} \sum_{m_f, M} \left| \sum_{\kappa_1, \kappa_2} e^{i(\delta_{\kappa_1} + \delta_{\kappa_2})} i^{l_1 - l_2} (-)^{j_1 + 1/2} \right. \\ &\times Y_{l_2}^{\frac{1}{2} + M - m_f}(\hat{p}_2) [(2l_1 + 1)(2j_1 + 1)]^{1/2} C \left(l_1, \frac{1}{2}, j_1; 0, \frac{1}{2} \right) \\ &\times C \left(l_2, \frac{1}{2}, j_2; \frac{1}{2} + M - m_f, m_f \right) C \left(j_1, j_2, L; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ &\left. \times C \left(j_1, L, j_2; \frac{1}{2}, M \right) R^{(EL)}(\kappa_1, \kappa_2, \omega) \right|^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Las cantidades $\mathcal{N}_L^{\text{RED}}(\omega)$ y $\mathcal{M}_L^{\text{RED}}(\omega)$ son elementos angulares de la matriz nuclear reducida que depende del estado inicial (final) del estado nuclear de espín J_i (J_f) y su proyección M_i (M_f), (Gargaro 1970). No se dan explícitamente ya que las mismas cantidades ocurren en la sección eficaz de foto-absorción y por lo tanto no aparecerán en la fórmula del espectro de fotones virtuales. En la ecuación (29), la integral radial está dada por

$$R^{EL}(\kappa_1, \kappa_2, \omega) = \sqrt{\frac{L}{L+1}} \int_0^\infty r^2 dr \{ h_{L-1}^1(\omega r) [f_{\kappa_1}(p_1 r) g_{\kappa_2}(p_2 r) - g_{\kappa_1}(p_1 r) f_{\kappa_2}(p_2 r)] \\ + \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{L} \right) h_{L-1}^1(\omega r) [f_{\kappa_1}(p_1 r) g_{\kappa_2}(p_2 r) + g_{\kappa_1}(p_1 r) f_{\kappa_2}(p_2 r)] \\ - h_L^1(\omega r) [f_{\kappa_1}(p_1 r) f_{\kappa_2}(p_2 r) + g_{\kappa_1}(p_1 r) g_{\kappa_2}(p_2 r)] \}. \quad (30)$$

La expresión para $(d\sigma/d\Omega)^{ML}$ es la misma que en la ecuación (29), excepto que se debe usar $|\mathcal{M}_L^{\text{RED}}(\omega)|^2$ en cambio, y la integral magnética es

$$R^{ML}(\kappa_1, \kappa_2, \omega) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\sqrt{L(L+1)}} \int_0^\infty r^2 dr h_L^1(\omega r) \\ \times \{ f_{\kappa_1}(p_1 r) g_{\kappa_2}(p_2 r) + g_{\kappa_1}(p_1 r) f_{\kappa_2}(p_2 r) \}. \quad (31)$$

Hay diferentes reglas de selección de paridades para los casos eléctricos y magnéticos que conciernen a las sumas sobre $\kappa_{1,2}$; se darán después que se escriba la expresión para el espectro de fotones virtuales.

El espectro de fotones virtuales se desprende de la ecuaciones (8), (29) y de las expresiones para la sección eficaz de foto-absorción $\sigma_f^{(\lambda L)}(\omega)$ (Merzbacher 1965, Bishop 1965)

$$\sigma_f^{(EL)}(\omega) = \frac{8\pi^3}{\omega} |\mathcal{N}_N^{\text{RED}}(\omega)|^2 \\ \sigma_f^{(ML)}(\omega) = \frac{8\pi^3}{\omega} |\mathcal{M}_N^{\text{RED}}(\omega)|^2; \quad (32)$$

y es dada por

$$N^{(\lambda L)}(E_1, \omega) = \frac{\alpha_{f.s.} p_1 (E_1 + m) (E_2 + m) \omega^4}{\pi p_2 (2L+1)} \sum_{\kappa_2} a_{\kappa_2}, \quad (33)$$

donde

$$a_{\kappa_2} = \sum_{\kappa_1} S(\lambda) (2j_1 + 1) (2j_2 + 1) \left| C \left(j_1, j_2, L; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) R^{(\lambda L)}(\kappa_1, \kappa_2, \omega) \right|^2. \quad (34)$$

El operador de proyección $S(\lambda)$ establece que la regla de selección $l_1 + l_2 + L$ es par para transiciones eléctricas e impar para transiciones magnéticas. Nótese que el espectro de fotones virtuales está dado por términos de una suma infinita sobre coeficientes a_{κ_2} marcados por la onda parcial de salida que, debido a la condición triangular de los momentos angulares, consiste de un número finito de términos. La convergencia y la técnica de suma de la serie de ondas parciales ha sido establecida (Soto Vargas, Onley y Wright 1977; y Wright, Onley y Soto Vargas 1977).

Para el caso de bremsstrahlung, donde un fotón real es emitido debido a la aceleración de una partícula cargada (un electrón o un positrón como casos de este artículo), la amplitud de dispersión en la calibración solenoidal (Rose 1955) está dada por el siguiente elemento de matriz (Gargaro 1970, Sud 1976):

$$\mathcal{H} = \int \langle f | -\vec{J}_e \cdot \vec{A} | i \rangle d\tau \quad (35)$$

donde $|f\rangle(|i\rangle)$ es el estado final (inicial) del electrón y $\vec{J}_e = -e\vec{\alpha}$ es el operador de la corriente del electrón ya introducida en el caso de fotones virtuales. El potencial vectorial para una onda plana puede ser expandido por medio de las conocidas soluciones de Hansen a la ecuación vectorial de Helmholtz (Eisenberg y Greiner 1970),

$$\begin{aligned} \vec{A}_\lambda(\vec{r}) = & \sqrt{\frac{2\pi}{\omega R^3}} \lambda \sqrt{2\pi} \sum_{LM} \sqrt{2L+1} (-i)^L D_{M\lambda}^{L*}(\varphi_k, \theta_k, 0) \\ & \times [A_L^{M*}(m; \vec{r}) - i\lambda A_L^{M*}(e; \vec{r})], \end{aligned} \quad (36)$$

donde $\lambda = \pm 1$ denota la polarización izquierda y derecha, R es el radio de normalización y $D_{M\lambda}^L$ son las matrices de rotación con ángulos del fotón θ_k y ϕ_k (dirección de onda plana \hat{k}). Las soluciones de Hansen, rotuladas por m o por e para magnético o eléctrico, son dadas en términos de armónicas esféricas vectoriales por:

$$\begin{aligned} A_L^M(m; r) &= j_L(\omega r) \vec{Y}_{L,L}^M(\hat{r}) \\ A_L^M(e; r) &= \left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{1/2} j_{L-1}(\omega r) \vec{Y}_{L,L-1}^M(\hat{r}) \\ &\quad - \left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2} j_{L+1}(\omega r) \vec{Y}_{L,L+1}^M(\hat{r}). \end{aligned} \quad (37)$$

El elemento de matriz en la ecuación (35) ahora toma la siguiente forma (Sud 1976):

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & (4\pi)^2 \sum_{\substack{\kappa_1 \mu_1 \\ \kappa_2 \mu_2 \\ LM\lambda}} \left[\frac{(E_2 + m_e)(E_1 + m_e)}{4E_1 E_2} \right]^{1/2} e^{i(\delta_{\kappa_1} + \delta_{\kappa_2})} i^{l_1 - l_2} \\ & \times (-i)^L Y_{l_2}^{\mu_2 - m_2}(\hat{p}_2) Y_{l_1}^{\mu_1 - m_1}(\hat{p}_1) \left(\lambda \sqrt{2L+1} \sqrt{2\pi} \left(\frac{2\pi}{\omega R^3} \right)^{1/2} \right) \end{aligned}$$

$$D_{M\lambda}^{L*}(\varphi_k, \theta_k, 0) \int d\vec{r} \psi_{\kappa_2}^{\mu_2}(p_2\vec{r}) \vec{\alpha} \cdot [A_L^{M*}(m; \vec{r}) - i\lambda A_L^{M*}(e; \vec{r})] \psi_{\kappa_1}^{\mu_1}(p_1\vec{r}). \quad (38)$$

De la teoría de perturbaciones de primer orden, la sección eficaz diferencial es

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega} = \frac{2\pi}{I_0} |\mathcal{H}|^2 \left(\frac{dn_e}{dE_2} \right) \left(\frac{dn_\gamma}{d\omega} \right), \quad (39)$$

donde otra vez I_0 es el flujo inicial de electrones y la densidad de estados finales del electrón (fotón) es dn_e/dE_2 ($dn_\gamma/d\omega$). Usando (de-Shalit y Talmi 1963)

$$\int d\Omega_k D_{M'\lambda}^{L'} D_{M\lambda}^L = \frac{4\pi}{2L+1} \delta_{L,L'} \delta_{M,M'}$$

para integrar sobre el ángulo del fotón (el fotón emitido no es detectado), y observando que los multipolos magnéticos tienen paridad $(-1)^{L+1}$ mientras que los multipolos eléctricos tienen paridad $(-1)^L$, podemos escribir la sección eficaz para bremsstrahlung como una suma incoherente sobre multipolos eléctricos y magnéticos (Sud 1976)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega} \right)^{EL} &= [4\alpha_{f.s.} (E_1 + m) (E_2 + m) (p_2/p_1) / \omega] \\ &\times \sum_{M, m_f} \left| \sum_{\kappa_1, \kappa_2} e^{i(\delta_{\kappa_1} + \delta_{\kappa_2})} i^{l_1 - l_2} (-1)^{j_1 + 1/2} Y_{l_2}^{1/2 - M - m_f}(\hat{p}_2) \right. \\ &\quad \times [(2l_1 + 1) (2j_1 + 1)]^{1/2} \\ &\quad \times C\left(l_1, \frac{1}{2}, j_1; 0, \frac{1}{2}\right) C\left(l_2, \frac{1}{2}, j_2; \frac{1}{2} - M - m_f, m_f\right) \\ &\quad \times C\left(j_1, j_2, L; \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right) C\left(j_1, L, j_2; \frac{1}{2}, -M\right) \\ &\quad \left. \times \mathcal{R}^{(EL)}(\kappa_1, \kappa_2, \omega) \right|^2, \end{aligned} \quad (40)$$

donde la integral radial es

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{(EL)}(\kappa_1, \kappa_2, \omega) &= \frac{\omega}{\sqrt{L(L+1)}} \int_0^\infty r^2 dr \left\{ \frac{L(L+1)}{\omega r} j_L(\omega r) \right. \\ &\quad [f_{\kappa_1}(p_1 r) g_{\kappa_2}(p_2 r) - g_{\kappa_1}(p_1 r) f_{\kappa_2}(p_2 r)] \\ &\quad + \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\omega r} \right) [\omega r j_{L-1}(\omega r) - L j_L(\omega r)] \\ &\quad \left. \times [f_{\kappa_1}(p_1 r) g_{\kappa_2}(p_2 r) + g_{\kappa_1}(p_1 r) f_{\kappa_2}(p_2 r)] \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

La sección eficaz de bremsstrahlung para el caso magnético es enteramente igual a la ecuación (40) excepto por las reglas de selección para κ (ver el caso de fotones virtuales) y la integral radial magnética, que es dada por

$$\mathcal{R}^{(ML)}(\kappa_1, \kappa_2, \omega) = \frac{\omega(\kappa_1 + \kappa_2)}{\sqrt{L(L+1)}} \int_0^\infty r^2 dr \{j_L(\omega r) \times [f_{\kappa_1}(p_1 r) g_{\kappa_2}(p_2 r) + g_{\kappa_1}(p_1 r) f_{\kappa_2}(p_2 r)]\}. \quad (42)$$

4. Conclusión

Debe señalarse que las integrales radiales que surgen tanto en procesos de la emisión de fotones reales como de virtuales, vienen de la misma interacción electromagnética básica. Desde el punto de vista de ondas distorsionadas (ver figura (6)), la única diferencia entre los procesos surge en la parte radial de la función de Green electromagnética (ver ecuaciones (17)) – la parte virtual involucrando $h_L^1(\omega r)$ mientras que el caso real involucra $j_L(\omega r)$. La sección eficaz total para bremsstrahlung consiste en una suma incoherente sobre cuadrados de elementos matriciales radiales y debe ser independiente de la calibración del cálculo. Esto es, aparte de la diferencia entre $h_L^1(\omega r)$ y $j_L(\omega r)$, ambos conjuntos de integrales radiales, aunque aparentemente diferentes por las distintas calibraciones usadas, son equivalentes. Es más, una prueba explícita puede ser construida usando el formalismo de la matriz Γ (Wright, Onley y Soto Vargas 1977) en que la parte real de las ecuaciones (30) y (31) son iguales a la de las ecuaciones (41) y (42). Así, ya que f y g son funciones de onda reales, y $j_L(\omega r) = \Re [h_L^1(\omega r)]$, es posible obtener las integrales radiales de Bessel de las integrales de Hankel simplemente tomándoles su parte real. Esta peculiaridad es de gran ventaja en el cálculo explícito de las integrales.

Los productos de las funciones de onda radiales que aparecen en las integrales radiales (30), (31), (41) y (42) son todas de la forma $f_1 f_2$, $g_1 g_2$, $f_1 g_2$, $g_1 f_2$; y, como se ha visto, se mezclan para formar las componentes requeridas de la distribución de carga y de corriente del electrón. Así se forman las expresiones fundamentales que aparecen en los procesos de emisión de fotones en la dispersión de electrones y positrones.

5. Bibliografía

- 1) Barber, W.C., *Annu. Rev. Sci.* 12, 1 (1962).
- 2) Bertozzi, W., en *A.I.P. Conference Proceedings on High Energy Physics*.
- 3) Bethe, H. y Heitler, W., *Proc. Roy. Soc. A*, 146, 83 (1934).
- 4) Biedenharn, L.C., *Notes on Multipole Fields*, no publicado, 1962.
- 5) Biedenharn, L.C. y Brussard, P.J., *Coulomb Excitation*, Oxford Univ. Press (Clarendon), London and New York, 1965.
- 6) Bishop, G.R., en *Nuclear Structure and Electromagnetic Interactions*, editado por N. Mac Donald, Plenum Press, New York, 1965.
- 7) Ciocchetti, G. y Molinari, A., *Nuovo Cimento Suppl.* 2, 59 (1964).
- 8) Corson, D.R. y Hansen, A.O., *Annu. Rev. Nucl. Sci.* 3, 67 (1953).
- 9) Dalitz, R.H. y Yennie, D.R., *Phys. Rev.* 105, 1598 (1957).
- 10) de Forest, T. y Walecka, J.D., *Advan. Phys.* 15, 1 (1966).
- 11) de-Shalit, A. y Talmi, I., *Nuclear Shell Theory*, Academic Press, New York, 1963.
- 12) Dirac, P.A.M., *Proc. Roy. Soc. Ser. A* 117, 610 (1928).
- 13) Donnelly, T.W. y Walecka, J.D., *Annu. Rev. Nucl. Sci.* 25, 329 (1975).
- 14) Drell, S.D., *Phys. Rev.* 87, 753 (1952).
- 15) Eisenberg, J.M. y Greiner, W., *Excitation Mechanisms of the Nucleus*, North-Holland, Amsterdam, 1970.
- 16) Elton, L.R.B., *Nuclear Sizes*, Oxford Univ. Press, London and New York, 1961.
- 17) Gargaro, W.W., Ph.D. dissertation, Ohio Univ., 1970.
- 18) Gargaro, W.W. y Onley, D.S., *Phys. Rev. C* 4, 1032 (1971).
- 19) Goldemberg, J. y Pratt, R.H., *Rev. Mod. Phys.* 38, 311 (1966).
- 20) Griffy, T.A. y Schiff, L.I., in *High Energy Physics* (E.H.S. Burhop, ed.), Vol. 1, Academic Press, New York, 1967.
- 21) Heitler, W., *The Quantum Theory of Radiation*, 3rd. ed., Oxford Univ. Press, London and New York, 1954.
- 22) Herman, R. y Hofstadter, R., *High Energy Electron Scattering Tables*, Stanford Univ. Press, Stanford, California, 1960.
- 23) Hofstadter, R., *Rev. Mod. Phys.* 28, 214 (1956).
- 24) Hofstadter, R., *Annu. Rev. Nucl.* 7, 231 (1957).
- 25) Hofstadter, R., *Electron Scattering and Nuclear and Nucleon Structure*, (R. Hofstadter, ed.), Benjamin, New York, 1963.

- 26) Hofstadter, R., Nobel lecture 1961, en *Nobel Lectures-Physics*, Elsevier, Amsterdam, 1964.
- 27) Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, 2nd ed., Wiley, New York, 1975.
- 28) Maximon, L.C. y Isabelle, D.B., *Phys. Rev. B133*, 1344 (1964).
- 29) McCormick, P.T, Keiffer, D.G. y Parzen, G., *Phys. Rev. 103*, 29 (1956.)
- 30) Meister, N.T y Griffy, T.A., *Phys. Rev. 133*, B1032 (1964).
- 31) Merzbacher, E., *Quantum Mechanics*, Wiley, New York, 1965.
- 32) Morse, P.M. y Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- 33) Mott, N.F., *Proc. Roy. Soc. Ser. A 124*, 426 (1929).
- 34) Nascimento, I.C., Wolyne, E. y Onley, D.S., *Nucl. Phys. A246*, 210 (1975).
- 35) Racah, G., *Nuovo Cimento 11*, 477 (1934).
- 36) Ravenhall, D.G., *Rev. Mod. Phys. 30*, 430 (1958).
- 37) Rose, M.E., *Multipole Fields*, Wiley, New York, 1955.
- 38) Rose, M.E., *Relativistic Electron Scattering*, Wiley, New York, 1961.
- 39) Rose, M.E., in *Perspectives in Modern Physics* (R.E. Marshak, ed.), Wiley, New York, 1966.
- 40) Schiff, L.I., *Phys. Rev. 87*, 750 (1952).
- 41) Schiff, L.I., *Rev. Mod. Phys. 30*, 462 (1958).
- 42) Schwinger, J., *Phys. Rev. 74*, 1439 (1948).
- 43) Schwinger, J., *Phys. Rev. 75*, 651 (1949).
- 44) Schwinger, J., *Phys. Rev. 75*, 898 (1949).
- 45) Soto Vargas, C.W., Onley, D.S. y Wright, L.E., *Nucl. Phys. A288*, 45 (1977).
- 46) Sud, K., Ph.D. dissertation, Ohio Univ., 1976.
- 47) Sud, K. y Soto Vargas, C.W., *Phys. Rev. A49*, 4624 (1994).
- 48) Talwar, I., Wright, L.E., Onley, D.S. y Soto Vargas, C.W., *Phys. Rev. C35*, 510 (1987).
- 49) Thie, J.A., Mullin, C.J. y Guth, E., *Phys. Rev. 87*, 962 (1952).
- 50) Überall, H., *Topics in electron scattering and nuclear models* (Notes of lectures), U.S. NRL Rep. 6729, Washington, Julio 1968.
- 51) Überall, H., *Electron Scattering from Complex Nuclei*, Academic Press, New York and London, 1971.
- 52) Weizäcker, C.F., *Z. Phys. 88*, 612 (1934).
- 53) Whittaker, E.T. y Watson, G.N., *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.
- 54) Williams, E.J., *Kgl. Dansk. Vid. Selsk. 13*, No. 4 (1935).
- 55) Wright, L.E., Onley, D.S. y Soto Vargas, C.W., *J. Phys. A: Math. Gen. 10*, L53 (1977).